

УДК 534.111, 519.6, 517.9

ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ РІВНЯННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СТРУНИ З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВОЇ ФОРМИ ЗГИНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ СТРУНИ

О. Ю. Олійник, Ю. К. Тараненко*

*Український державний хіміко-технологічний університет, пр. Гагаріна 8, м. Дніпро,
Україна, 49005, E-mail: oleinik_o@ukr.net.*

У статті розглянуто чисельне рішення рівняння коливань струни одиничної довжини із закріпленими кінцями. Наведено вид практичної реалізації моделі візуалізації форми коливань струни в програмному середовищі Python. Приклади програмної реалізації дозволяють використовувати модель для декількох систем збудження. Розглянуто найпоширеніші способи розподілу імпульсної сили системи збудження (щипок, удар) в струнних перетворювачах. Наведені графічні результати роботи програми.

Ключові слова: струна, резонатор, форма коливань, візуалізація.

В статье рассмотрено численное решение уравнение колебаний струны единичной длины с закрепленными концами. Приведено вид практической реализации модели визуализации формы колебаний струны в программной среде Python. Примеры программной реализации позволяют использовать модель для нескольких систем возбуждения. Рассмотрены самые распространенные способы распределения импульсной силы системы возбуждения (щипок, удар) в струнных преобразователях. Приведенные графические результаты работы программы..

Ключевые слова: струна, резонатор, форма колебаний, визуализация.

The numerical solution of the equation of oscillations of a string of unit length with fixed ends is considered in the article. The form of practical realization of the model of visualization of the form of oscillations of a string in the Python software environment is given. Examples of software implementation allow using the model for several excitation systems. The most common methods for distributing the impulse force of the excitation system (pinch, impact) in string converters are considered. The resulted graphic results of the program .

Key words: string, resonator, waveform, visualization.

Вступ. Струнні перетворювачі добре себе зарекомендували в приладах для вимірювання тиску і переміщень. У сучасних системах неруйнівного контролю використовуються спеціальні струнні датчики, що мають цифровий вихід, які кріпляться безпосередньо на об'єкт і передають в режимі реального часу значення деформації, тиску і температури контрольованого обладнання. Отримані з датчиків дані по протоколу ModBus через інтерфейс RS-485 передаються в систему MasterSCADA, яка стежить одночасно за більш ніж 300 параметрами стану об'єкта [1].

У більшості таких вимірювальних пристроїв струна працює в режимі ударного збудження за запитом. Струнні резонатори характеризуються високою заводстійкістю, низькою вартістю, високою точністю і універсальністю застосування, при цьому мають досить високу добротність і стабільність частоти [2].

У зв'язку з цим, розвиток парку струнних датчиків, за рахунок використання нових матеріалів, форм чутливих елементів, способів їх кріплення, технологій виробництва є дуже перспективним напрямком в приладобудуванні.

1. Аналіз літературних даних і постановка проблеми. При всіх перерахованих достоїнствах струнних перетворювачів їх використання у неруйнівному контролі пов'язане з деякими обмеженнями. Струнні резонатори з однієї струною мають нелінійність функції перетворення порядку 3 5% на 10% девіації частоти і істотну погрішність. [3]. Перш за все, ця похибка пов'язана з впливом зовнішніх факторів, таких як температура, тиск, вібрація і т. Д. [1]. Проблема була вирішена застосуванням диференціальних струнних перетворювачів. Чутливий елемент диференціального перетворювача являє собою дві однакові струни, причому під впливом

деформації частота власних коливань однієї струни збільшується, а частота інший зменшується [4].

Другим стримуючим обмеженням для використання струнних перетворювачів є нестабільність роботи датчика [5]. Стабільність функції перетворення струнного резонатора в першу чергу визначається якістю кріплення попередньо натягнутою струни до пружного елемента. Крайні способи кріплення стрічкових струн, які використовуються в сучасних датчиках, наведені в роботі [6]. Кардинальне вирішення проблеми кріплення, яке зводиться до відмови від будь-якого кріплення як такого, запропоновано Л.Г. Еткіну [7]. Роль резонатора в цих конструкціях виконує замість струни тонка (менше міліметра) сталева пластинка, виготовлена за одне ціле з пружним елементом з однієї заготовки.

Особливою складністю при проектуванні струнних резонаторів є візуалізація згинальної лінії струни, так як початкова форма коливань струни залежить від системи збудження струн. Візуалізація моделі струни дозволяє побачити, як резонує датчик при вимірюванні сигналу, тим самим спрощуючи задачу вибору оптимальних конструктивних характеристик сенсора. Це завдання вирішується проектувальниками шляхом пошуку рішення диференціального рівняння вільних коливань струни для кожного конкретного випадку експлуатації. При використанні струнних перетворювачів, наприклад, в системах моніторингу стану тунелів, початкові умови, навантаження на чутливий елемент можуть істотно відрізнятись [8]. Отримання чисельного рішення диференціального рівняння вільних коливань струни з програмною реалізацією суттєво спростить процес проектування струнних вимірювальних перетворювачів і дозволить розширити парк приладів.

2. Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розробка програмної реалізації чисельного рішення диференціального рівняння вільних коливань струни одниничної довжини з урахуванням початкової форми згинальної лінії струни

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні завдання:

- розробити модель програмної реалізації чисельного рішення диференціального рівняння вільних коливань струни одниничної довжини з урахуванням початкової форми згинальної лінії струни в програмному середовищі Python;

- отримати візуалізацію згинальної лінії вільних коливань струни отриманих при різних конструкціях системи збудження струнного

датчика.

3. Особливості програмної реалізації на Pythonю. Рівняння коливань струни одниничної довжини із закріпленими кінцями має вигляд [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де функція $u = u(x, t)$ являє собою відхилення струни від осі Ox в точці x в момент часу t , a - постійний параметр залежить від властивостей струни.

Будемо розглядати малі коливання (відхилення u і точок струни від положення рівноваги - осі Ox - мало), плоскі (коливання відбуваються тільки в площині xOy), поперечні (кожна точка струни рухається строго перпендикулярно положенню рівноваги). Задамо початкові і граничні умови для вирішення рівняння (1):

початкові умови:

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

$$0 \leq x \leq 1,$$

нульові граничні умови: $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Для вирішення завдання потрібно побудувати сітку з 11 вузлів по x ($i = 0, 1, \dots, 10$) і провести обчислення для 16 шарів по t ($j = 0, 1, \dots, 16$). Обчислення виконати з кроком h по x , що дорівнює 0,1 і кроком t по t , рівним 0,05. Двовимірний сітка буде мати вигляд, наведений на рис. 1.

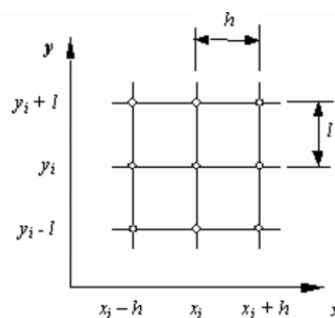


Рисунок 1 – Двовимірний сітка для вирішення рівняння

Використовуємо для розрахунків формулу [10]:

$$u_{j+1,i} = 2(1 - \lambda)u_{j,i} + \lambda(u_{j,i+1} + u_{j,i-1}) - u_{j-1,i}. \quad (2)$$

Моделювання виконано в програмному середовищі Python 3.4. Сьогодні Python є ідеальною мовою для швидкого написання різних додатків, що працюють на більшості

поширених платформ [11]. Крім того, Python є вільно доступним програмним продуктом, що дає можливість широкого використання результатів розробки.

Лістинг програмної реалізації моделі має вигляд:

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
h=0.1#крок по x
t=0.05#крок по t
a=1#відношення початкового натягу T до
маси одиниці довжини
l=(a*t/h)**2#розрахунковий коефіцієнт
n=11#сітка з 11 вузлів по x (i = 0, 1, ... 10)
m=17#провести обчислення для 16 шарів по t
(j = 0, 1, ... 16).
x=[h*i for i in range(0,n)]# координата x
U= np.zeros([m,n])# матриця для
розміщення розрахованих значень
for j in range(0,m): #внесення умов
    for i in range(0,n):
        U[0,i]=x[i]*(x[i]**2-1)#початкові
умови
        U[1,i]=U[0,i]#початкові умови
        U[j,0]=0#граничні умови
        U[j,10]=0# граничні умови
    for j in range(1,m-1):#внесені розширення
        for i in range(1,n-1):
            U[j+1,i]=2*(1-
l)*U[j,i]+l*(U[j,i+1]+U[j,i-1])-U[j-1,i]
y0=[];y5=[];y10=[];y16=[]#списки для
виводу шарів
for i in range(0,n):
    y0.append(U[0,i])
    y5.append(U[5,i])
    y10.append(U[10,i])
    y16.append(U[16,i])
plt.title("Форми коливань струни для
начальних умов - U[0,i] =f(x) \n, що залежать
від конструкції системи збудження", size=12)
plt.plot(x, y0, label="шар 0")
plt.plot(x, y5, label="шар -5")
plt.plot(x, y10, label="шар -10")
plt.plot(x, y16, label="шар -16")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
На рис. 2. представлена графічна частина
результату роботи моделі.
```

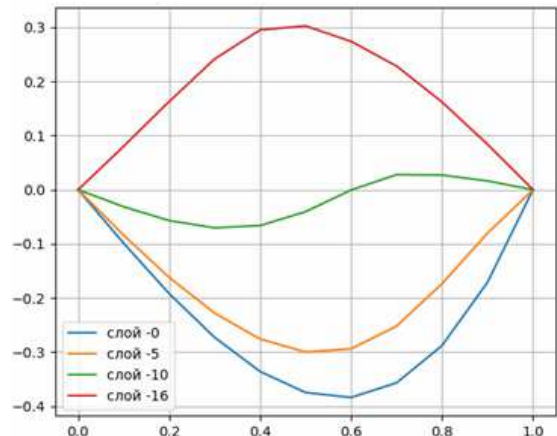


Рисунок 2 – Візуалізація форм коливань струни для початкових умов $u[0,i]=f(x)$, що залежать від конструкції системи збудження

Відмінною рисою даної програмної реалізації є те, що введення початкових і граничних умов, а також розрахунок реалізовані на одній матриці, що спрощує їх зміну. Для початкових умов $f(x)$, наприклад, для електромагнітної системи імпульсного збудження $f(x) = x(x^2-1)$ [12].

Програмна реалізація опису вільних коливань струни для зосередженого ударного збудження в центрі матиме вигляд:

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
h=0.1#крок по x
t=0.05#крок по t
a=1# відношення початкового натягу T до
маси одиниці довжини
b=0.5
l=(a*t/h)**2# розрахунковий коефіцієнт
n=11#сітка з 11 вузлів по x (i = 0, 1, ... 10)
m=19# провести обчислення для 16 шарів по
но t (j = 0, 1, ... 16).
x=[h*i for i in range(0,n)]
U= np.zeros([m,n])
for j in range(0,m):
    for i in range(0,n):
        if 0<=x[i]<b:
            U[0,i]=a*x[i]/b
        elif b<=x[i]<=1:
            U[0,i]=a*(1-x[i])/(1-b)
        U[1,i]=U[0,i]
        U[j,0]=0
        U[j,10]=0
    for j in range(1,m-1):
        for i in range(1,n-1):
            U[j+1,i]=2*(1-
l)*U[j,i]+l*(U[j,i+1]+U[j,i-1])-U[j-1,i]
```

```

y0=[];y5=[];y10=[];y16=[]
for i in range(0,n):
    y0.append(U[0,i])
    y5.append(U[5,i])
    y10.append(U[10,i])
    y16.append(U[16,i])
plt.title("Форми коливань струни для
початкових умов –"Удар" \n ,що залежать від
конструкції системи збудження", size=12)
plt.plot(x, y0, label="шар -0")
plt.plot(x, y5, label="шар -5")
plt.plot(x, y10, label="шар -10")
plt.plot(x, y16, label="шар -16")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

На рис. 3. представлена графічна частина результату роботи моделі.

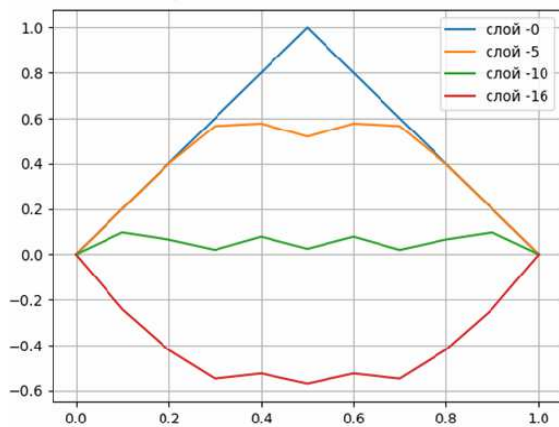


Рисунок 3 – Візуалізація форм коливань струни для початкових умов «удар», що залежить від конструкції системи збудження

Програмна реалізація візуалізації вільних коливань струни для розподіленого ударного збудження в центрі приведена нижче:

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
h=0.1#крок по x
t=0.05#крок по t
a=1# відношення початкового натягу T до
маси одиниці довжини
b=0.4
c=0.6
l=(a*t/h)**2# розрахунковий коефіцієнт
n=11#сітка з 11 вузлів по x (i = 0, 1, ... 10)
m=19#провести обчислення для 16 шарів по t
(j = 0, 1, ... 16).
x=[h*i for i in range(0,n)]
U= np.zeros([m,n])
for j in range(0,m):

```

```

for i in range(0,n):
    if 0<=x[i]<b:
        U[0,i]=a*x[i]/b
    elif b<=x[i]<c:
        U[0,i]=a
    elif c<=x[i]<=1:
        U[0,i]=a*(1-x[i]/(1-c))
    U[1,i]=U[0,i]
    U[j,0]=0
    U[j,10]=0
for j in range(1,m-1):
    for i in range(1,n-1):
        U[j+1,i]=2*(1-
l)*U[j,i]+l*(U[j,i+1]+U[j,i-1])-U[j-1,i]
y0=[];y5=[];y10=[];y16=[]
for i in range(0,n):
    y0.append(U[0,i])
    y5.append(U[5,i])
    y10.append(U[10,i])
    y16.append(U[16,i])
plt.title("Форми коливань струни для
початкових умов- "Щипок" \n що залежать від
конструкції системи збудження", size=12)
plt.plot(x, y0, label="шар -0")
plt.plot(x, y5, label="шар -5")
plt.plot(x, y10, label="шар -10")
plt.plot(x, y16, label="шар -16")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

Рисунок 4 демонструє результат роботи моделі.

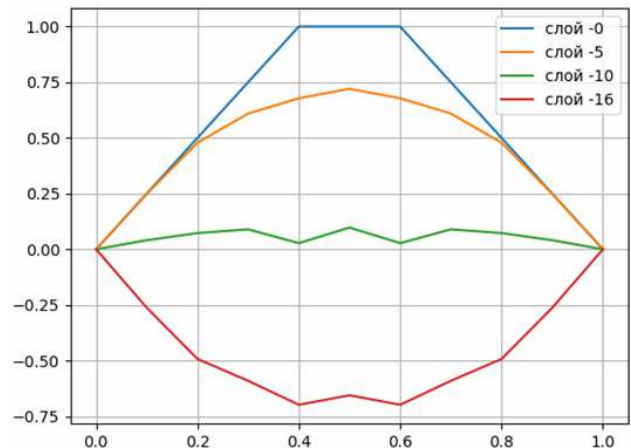


Рисунок 4 – Візуалізація форм коливань струни для початкових умов «щипок», що залежать від конструкції системи збудження

ВИСНОВКИ

Запропоновані варіанти програмної реалізації чисельного рішення рівняння коливань струни в програмному середовищі Python дозволяють знайти форми коливань струни для будь-якої функції $f(x)$ розподілу імпульсної сили системи збудження (щипок, удар і т.п.). Застосування даних програм при розробці нових вимірювальних перетворювачів зі струнними резонаторами дозволить значно скоротити час проектування.

1. Кравченко, В. Н. *Современные технологии в измерении давления, расхода и уровня [Текст]* / В. Н. Кравченко // *Rational Enterprise Management*. – 2007. – Т.2. – С.64-65. 2. Скачко, Ю. В. *Анализ влияния вибрации на погрешность струнного резонатора [Текст]* / Ю. В. Скачко, А. И. Юрин // *Измерительная техника*. – 2006. – № 12. – С. 14-16. 3. Oliynyk, O. *Development of auto-oscillating system of vibration frequency sensors with mechanical resonator [Text]* / O. Oliynyk, Yu. Taranenko, A. Shvachka, O. Chorna // *Eastern-European journal of enterprise technologies*. – 2017. – Vol.85. – P. 56-60. doi.org/10.15587/1729-4061.2017.93335 4. Saponara, S. *A Cost-Effective 10-Bit D/A Converter for Digital-Input MOEMS Micromirror Actuation [Text]* / S. Saponara, T. Baldetti, L. Fanucci // *VLSI Design*. – 2010. – Vol.1. – P. 1-8. doi.org/10.1155/2010/169079 5. Bandyopadhyay, B. *Control of vibrations in flexible smart structure using fast output sampling feedback technique* / B. Bandyopadhyay, T. C. Manjunath // *International Journal of Information and Mathematical Sciences*. – 2007. – Vol. 3, № 2. – P. 127-141. 6.

*Авиационные приборы [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. В. А. Прилепский, Н. А. Яковенко. - Электрон. текстовые и граф. дан. (396 Мбайт). 7. Эткин, Л. Г. *Виброчастотные датчики. Теория и практика* / Л. Г. Эткин – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 408 с 8. Карпюк, В. М. *Узагальнена оцінка впливу конструктивних чинників і чинників зовнішньої дії на внутрішні зусилля в залізобетонних зусилля оправах тунелів [Текст]* / В. М. Карпюк // *Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві*. – 2014. – Т.17. – С.103-112. 9 Burskii, V. P. *Dirichlet and Neumann Problems for String Equation, Poncelet Problem and Pell-Abel Equation Symmetry [Text]* / V. P. Burskii, A. S. Zhedanov // *Integrability and Geometry: Methods and Applications*. – 2006. – Vol. 2. – №041, 7 pages. 10 Panza. M. J. *Euler-Maclaurin Closed Form Finite State Space Model for a String Applied to Broadband Plate Vibrations [Text]* / M. J. Panza // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2010. – 14 pages. doi:10.1155/2010/817194 11. . Г. Россум. *Язык программирования Python*. – 2001 – 454 с. 12. Дмитриенко Г. Н. *Численное решение гиперболического уравнения для струны с закрепленными концами* / Дмитриенко Г. Н. // *Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля*. – 2012. - №17 (188), ч. 1. - С. 189-194.*

Поступила в редакцію 05.10.2017 р.

Рекомендували до друку: докт.техн.наук,
проф. Олійник А. П, докт. техн. наук, проф.
Заміховський Л. М.