

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

УДК 519.876.5

DOI: 10.31471/1993-9981-2018-2(41)-82-91

### РОЗРОБКА СИСТЕМИ ОЦІНКИ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛОПАТЕЙ СУШИЛЬНОГО АГРЕГАТУ ТА ЙОГО ТЕХНОЛОГІЧНИХ ВЕНТИЛЯТОРІВ

*Г. В. Григорчук, А. П. Олійник\**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, м.  
Івано-Франківськ, 76019, andrii\_oliinyk@gmail.com, tel.+380342723824*

Запропоновано систему оцінки аеродинамічних характеристик лопатей та лопаток технічного обладнання цукрової промисловості. Проведено вибір системи координат, створено математичну модель процесу обтікання, записано інтегральне рівняння Фредгольма II роду для визначення дотичної компоненти швидкості потоку, запропоновано метод його чисельного розв'язку, створено відповідне програмне забезпечення. Проведено тестові розрахунки для модельних еліптичних профілів під різними кутами атак та виявлено добре узгодження з даними про розрахунки за іншими моделями. Вказуються області подальшого використання методики.

Ключові слова: лопать, обтікання профілю, інтегральне рівняння Фредгольма, чисельний метод, аеродинамічні коефіцієнти.

Выбрана система координат, создана математическая модель процесса обтекания, записано уравнение Фредгольма II рода для определения касательной составляющей скорости потока, предложен метод численного решения, создано соответствующее программное обеспечение. Проведены тестовые расчеты для модельных эллиптических профилей под разными углами атаки и установлено хорошее совпадение результатов с данными о расчетах по другим моделям. Указаны дальнейшего применения методики.

Ключевые слова: Лопасть, обтекание профиля, интегральное уравнение Фредгольма, численный метод, аэродинамические коэффициенты.

A system for estimating the aerodynamic characteristics of shovels and blades of the technical equipment of sugar production is proposed. The coordinate system choosing was made, the flowing around profile mathematical model is given, the integral equation of the second type were given to estimate the flow velocity tangential component, the numerical method of one's solution is given, the corresponding software was made. The testing calculations for the modeling elliptical profile under the different angle of attack, the good correlation between the results of different method of calculation was showed. The areas of the future using of method was determined.

Key words: blade, gas flow, integral equation, numerical method, aerodynamic coefficients.

При аналізі роботи технологічного обладнання для виробництва цукру, який наведено в роботі [1], встановлено, що конструктивна схема двобарабанної сушильно-охолоджувальної установки містить два технологічних вентилятори та сушильний та охолоджувальний барабани, елементами конструкції яких є лопаті та лопатки – об'єкти, які в процесі їх експлуатації зазнають дії значних аеродинамічних навантажень нестационарного характеру. Це призводить до зміни геометричної конфігурації вказаних об'єктів, і, як наслідок, до зміни технологічних показників обладнання – ефективності

вентиляторів, кількості поданої в барабани сировини, якості кінцевого продукту. Зміну конфігурації лопатей вентиляторів та лопаток барабанів фіксують при регулярних технічних оглядах, проте питання оцінки зміни геометрії на ефективність функціонування обладнання залишається недостатньо вивченим. При цьому практично не використовуються методи прямого аеродинамічного розрахунку профілів [2,3,7], хоча вони дозволяють не тільки розрахувати компоненти швидкості, але і всі існуючі аеродинамічні характеристики профілів лопатей та лопаток. Вказані методи широко використовуються при проектуванні та

визначенні ресурсу авіаційної техніки, накопичено значний досвід у створенні та реалізації моделей різних типів обтікання. В пропонованій роботі представлено математичну модель процесу обтікання та розрахунковий алгоритм контролю аеродинамічних характеристик лопатей та лопаток конструктивних елементів двобарабанної сушильно-охолоджувальної установки з

урахуванням зміни їх геометрії в процесі експлуатації, що обумовлюється зношенням матеріалу, нестационарним характером технологічних процесів тощо.

Задача оцінки аеродинамічних характеристик елементів конструкції двобарабанної сушильно-охолоджувальної установки вирішується у такий спосіб:

1. Вибір системи координат

З профілем лопаті пов'язується криволінійна система координат, в якій параметричне подання профілю лопаті задається шляхом введення функції його геометрії (рис.1):

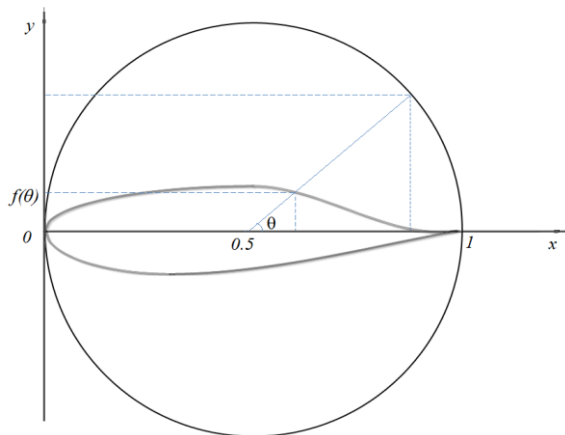


Рисунок 1 – Пов'язана з профілем лопатки система координат.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \\ y = f(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

Функція  $f(\theta)$  задає геометричну конфігурацію профілю лопаті, вона може бути задана як аналітично (еліпс, фрагменти кола, параболи тощо), так із використанням певних інтерполяційних процедур у тому випадку, коли профіль лопаті задається координатами певного набору точок на поверхні лопаті  $(\theta_i, y_i)$ .

Вказана функція повинна враховувати наступні властивості профілів лопатей та лопаток:

- можливість встановлення взаємно однозначного співвідношення між точкою на профілі та кутом  $\theta$ ;
- мала товщина профілю в порівнянні з його довжиною;
- наявність гострих кромek на задній границі профіля.

Вибір системи координат у вигляді (1) дає змогу отримати однозначне відображення між кутом  $\theta$  та точками на поверхні лопаті, що є важливим моментом при чисельному розв'язку задачі для випадків, коли профіль не має викривлення вздовж осі – еліптичні, кругові профілі, профілі з двох еліптичних поверхонь різного ексцентриситету тощо.

2. Інтегральне рівняння Фредгольма II роду для обчислення дотичної компоненти швидкості газового потоку на поверхні профілю

При виведенні інтегрального рівняння використовується відома з курсу математичного аналізу формула Гріна [4]:

$$\iiint_G (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma,$$

де  $u, v$  – деякі двічі неперервно диференційовані функції;  $G$ , та  $\Sigma$  – відповідно тривимірна область та поверхня, що її обмежує;  $\Delta$  – оператор Лапласа в обраній системі координат;

$\frac{\partial u}{\partial n}$  – нормальна похідна відповідної функції, яка визначається так:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n}, \quad (3)$$

де  $\nabla f$  – оператор градієнта функції  $f$ ;  $\vec{n}$  – нормаль до відповідної поверхні

Інтегральне рівняння Фредгольма II роду встановлюється з використанням формули (2), при цьому функції  $u$  та  $v$  вибираються наступним чином:

а)  $u = \varphi$ , де  $\varphi$  – потенціал потоку [5], функція, що володіє властивістю:

$$\vec{V} = \nabla \varphi, \quad (4)$$

де  $\vec{V}$  – вектор швидкості,  $\nabla$  – оператор градієнта.

В декартовій системі координат залежність (4) надається у вигляді:

$$\vec{V} = (u, v, w) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (5)$$

б)  $v = \frac{1}{|\vec{r}|}$ , де

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} -$$

відстань між двома точками, а  $\vec{r}$  - вектор переміщення від точки  $M(x; y; z)$  до точки

$$M_0(x_0; y_0; z_0).$$

З курсу гідромеханіки відомо, що  $\varphi$  - гармонічна функція, для якої за означенням виконується рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

причому рівняння (6) може бути записане в різних системах координат. Крім того, прямою перевіркою виконання умови (6)

$$: K(\theta, \theta_0) = \frac{[y(\theta) - y(\theta_0)]x'(\theta_0) - [x(\theta) - x(\theta_0)]y'(\theta_0)}{(x(\theta) - x(\theta_0))^2 + (y(\theta) - y(\theta_0))^2}, \quad (8)$$

де  $x(\theta); x(\theta_0); y(\theta); y(\theta_0)$  - обчислені у відповідних точках за формулами (1) компоненти;

$$\phi(\theta_0) = V_\infty (x(\theta_0) \cos \alpha + y(\theta_0) \sin \alpha), \quad (9)$$

де  $V_\infty$  - швидкість газового або рідинного потоку, що обтікає лопать, в зоні незбуреного потоку на достатньо великій відстані від неї;  $\alpha$  - кут атаки профілю (кут між віссю профілю та напрямком газового потоку). Важливим моментом, який дозволяє одержати зручну для практичних розрахунків методику оцінки аеродинамічних характеристик, є обґрунтований перехід від тривимірної задачі (2) до одновимірної (7). При розв'язанні практичних задач в допущенні про стаціонарність газового потоку приймається умова виконання постулату Чаплигіна-Жуковського:  $V_\theta(0) = V_\theta(2\pi) = 0$ , величина  $V_\infty$  приймається рівною 1, тобто, всі одержані числові результати масштабовані за швидкістю потоку, що набігає на лопать. Визначення шляхом розв'язання рівняння (7) дотичної компоненти  $V_\theta$  є достатнім для оцінки всіх аеродинамічних характеристик, оскільки компонента  $V_\theta$  повністю визначає вектор швидкості  $\vec{V}$  через ту обставину, що нормальна

встановлюється, що функція  $\frac{1}{|\vec{r}|}$  також

задовольняє умові (6).

Застосовуючи формулу Гріна (2) до функцій  $\varphi$  та  $\frac{1}{|\vec{r}|}$  та проводячи перехід до

контурних інтегралів з урахуванням співвідношень (6) для вказаних функцій, можна одержати інтегральне рівняння Фредгольма II роду відносно дотичної до поверхні профілю лопаті компоненти швидкості газового потоку [3, 7]:

$$V_\theta(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_\theta(\theta) K(\theta; \theta_0) d\theta + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(\theta_0), \quad (7)$$

де  $V_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ ;  $K(\theta; \theta_0)$  - ядро інтегрального рівняння, яке записується у вигляді

до поверхні лопаті компонента швидкості газового потоку дорівнює нулю (умова непротікання рідини через поверхню профілю). Після визначення  $V_\theta$  обчислюється фізична компонента швидкості [5]:

$$U_\theta = \frac{V_\theta}{\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}}, \quad (10)$$

після того обчислюються наступні аеродинамічні характеристики:

- коефіцієнт тиску  $C_p(\theta)$ :

$$C_p(\theta) = 1 - \frac{V_\theta(\theta)^2}{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} = 1 - U_\theta^2;$$

- коефіцієнт підйимальної сили:

$$C_y = \int_0^{2\pi} C_p(\theta) x'(\theta) d\theta; \quad (12)$$

- коефіцієнт індуктивного опору:

$$C_x = - \int_0^{2\pi} C_p(\theta) y'(\theta) d\theta; \quad (13)$$

- коефіцієнт моменту відносно попередньої кромки профілю:

$$C_{m_z} = \int_0^{2\pi} C_p(\theta)x(\theta)x'(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} C_p(\theta)y(\theta)y'(\theta)d\theta; \quad (14)$$

3. Алгоритм чисельного розв'язку задачі :

З метою чисельного розв'язання задачі до інтегрального рівняння (7) застосовується формула трапецій [6] для чисельного розрахунку інтегралу на розбитті за координатою:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{2N};$$

$$\theta_i = \Delta\theta(i-1), i = 1, 2, \dots, 2N+1.$$

З урахуванням виконання постулату Чаплигіна-Жуковського  $V_\theta(\theta_1) = V_\theta(\theta_{2N+1}) = 0$  одержується система лінійних алгебраїчних рівнянь [6]:

$$V_\theta(\theta_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{2N} V_\theta(\theta_i)K(\theta_i, \theta_j) + 2 \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(\theta_i) \quad (15)$$

$$j = 2, 3, \dots, 2N,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = V_\infty(x'(\theta)\cos\alpha + y'(\theta)\sin\alpha). \quad (16)$$

Ядра інтегральних рівнянь розраховуються за формулами:

$$K(\theta_i, \theta_j) = K_{ij} = \frac{(y_i - y_j)x'_j - (x_i - x_j)y'_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, i \neq j \quad (17)$$

$$K(\theta_i, \theta_i) = K_{ii} = \frac{1}{2} \frac{x'_i y''_i - y'_i x''_i}{(x'_i)^2 + (y'_i)^2}, i = j \quad (18)$$

Слід зазначити, що формула (18) одержується з формули (17) застосуванням до останньої правила Лопітала за умови  $\theta_i = \theta_j$ . Крім того, існування єдиного розв'язку системи (15)

$$C_{m_z} = \sum_{i=1}^{2N} C_p(\theta_i)x(\theta_i)x'(\theta_i) \frac{\pi}{N} + \sum_{i=1}^{2N} C_p(\theta_i)y(\theta_i)y'(\theta_i) \frac{\pi}{N} \quad (22)$$

В розрахунках приймається, що  $\pi = 3.14159265358$ . У тих випадках, коли застосування формули трапецій не задовольняє необхідному для практичних розрахунків, доцільно або збільшити кількість розрахункових точок на профілі, або використати інший метод чисельного інтегрування функцій.

4. Результати тестових розрахунків.

З метою практичної реалізації наведеної математичної моделі проведено тестові розрахунки для еліптичних профілів з різним ексцентриситетом. Розроблено алгоритм розв'язання інтегрального рівняння, який

контролюється перевіркою умови нерівності нулю визначника матриці цієї системи, що дозволяє використати при побудові компонентів матриці системи (15) саме формули (17)-(18) (на відміну від підходу, прийнятого в [7], згідно з яким встановлюються додаткові умови на ядра інтегрального рівняння (7), пов'язані з існуванням та єдиністю розв'язку). Оскільки система (15) за достатньо малих кроків розбиття при переході від (7) до (15) як завгодно точно наближає значення інтегралу в (7), то існування нетривіального розв'язку гарантує виконання умови нерівності нулю визначника системи (15). Розрахункові формули (10) - (14) записуються з використанням формул чисельного розрахунку інтегралів та встановлених раніше співвідношень (1), які задають геометрію профілю:

$$C_p(\theta_i) = 1 - \frac{V_\theta(\theta_i)^2}{x'(\theta_i)^2 + y'(\theta_i)^2}, \quad (19)$$

$$C_x = -\sum_{i=1}^{2N} C_p(\theta_i)y'(\theta_i) \frac{\pi}{N}, \quad (20)$$

$$C_y = -\sum_{i=1}^{2N} C_p(\theta_i) \frac{1}{2} \sin \theta_i \frac{\pi}{N}, \quad (21)$$

базується на використанні для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методу Гауса з вибором головного елемента по стовпчиках для  $N = 23$  та  $N = 47$  розрахункових точок по лопаті. При цьому подання (1) записується у вигляді:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \\ y = \varepsilon_1 \sin \theta \\ y = \varepsilon_2 \sin \theta \end{cases} \quad (23)$$

В поданні (23) передбачається, що форма профілю лопаті може бути різною на верхній та нижній поверхнях лопаті, тому значення  $\varepsilon_1$  приймається для значень  $0 \leq \theta \leq \pi$ , в той час як значення  $\varepsilon_2$  - при  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ . Якщо розглядається еліптичний профіль, то  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Результати розрахунків для значень  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.08 \div 0.2, N = 23, N = 47$ , які відповідають тонким профілям лопатей та лопаток, показали практично точне співпадання з результатами розрахунків за методом дискретних вихорів [2] та методом комфортного відображення [8] при різних значеннях кута атаки:  $\alpha = 0 \div 10^\circ$ , що підтверджується

графіками, наведеними на рис.1, на якому співпадають криві розподілу швидкості, одержані з використанням розробленої методики розрахунку і вказаних вище двох методів.

Крім того, для значення кута атаки  $\alpha = 0$  одержано відомий теоретичний результат:  $C_y = C_{mz} = 0$  для еліптичного профілю ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ). Таким чином, доведено коректність обчислювальної процедури та можливість використання відповідного програмного забезпечення для розрахунку аеродинамічних характеристик лопатей технологічного обладнання для осушення цукру, яке тривалий час перебуває в експлуатації

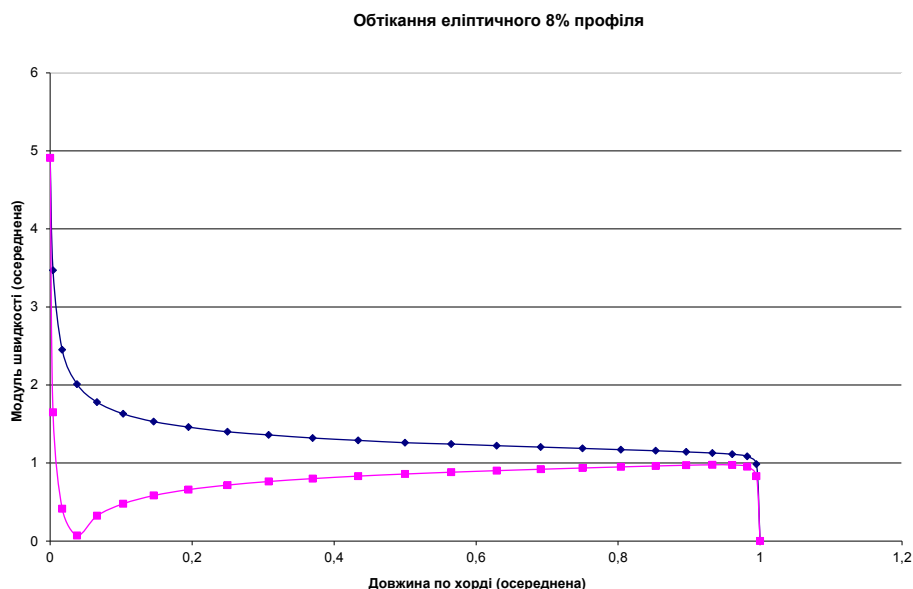


Рисунок 2 – Розподіл швидкості по поверхні еліптичного профілю.

За результатами розрахунків є можливість контролю наступних параметрів:

- залежність аеродинамічних характеристик профілю від кута атаки;
- залежність аеродинамічних характеристик від зміни геометричних характеристик внаслідок зносу;
- розподіл швидкості по профілю;
- оптимальна геометрична конфігурація профілю з точки зору одержання

необхідних аеродинамічних характеристик.

При реалізації запропонованої моделі процесу обтікання розрахунки дозволяють одержати наступні результати, які приводяться для двох еліпсів з різними ексцентриситетами:

1. Циркуляція вектора швидкості навколо профілю = -3.25467

Кут атаки = 15.00000     $e_1 = .45000$      $e_2 = .45000$

	$V_\theta$	Фіз комп	$C_p(\theta)$ :	
	(10)			
x( 1)=	.995722	-.121880	-.270305	.926935
x( 2)=	.982963	-.245875	-.542146	.706078
x( 3)=	.961940	-.369882	-.808196	.346819
x( 4)=	.933013	-.491753	-1.062087	-.128030
x( 5)=	.896677	-.609431	-1.299006	-.687417
x( 6)=	.853553	-.720875	-1.515535	-1.296845
x( 7)=	.804381	-.824202	-1.709695	-1.923057
x( 8)=	.750000	-.917629	-1.880461	-2.536135
x( 9)=	.691342	-.999563	-2.027534	-3.110894
x(10)=	.629410	-1.068601	-2.150933	-3.626514
x(11)=	.565263	-1.123568	-2.250781	-4.066016
x(12)=	.500000	-1.163505	-2.327010	-4.414976
x(13)=	.434737	-1.187751	-2.379357	-4.661340
x(14)=	.370590	-1.195877	-2.407122	-4.794235
x(15)=	.308658	-1.187751	-2.409257	-4.804519
x(16)=	.250000	-1.163508	-2.384333	-4.685043
x(17)=	.195619	-1.123565	-2.330681	-4.432073
x(18)=	.146447	-1.068601	-2.246577	-4.047108
x(19)=	.103323	-.999564	-2.130578	-3.539362
x(20)=	.066987	-.917629	-1.981893	-2.927901
x(21)=	.038060	-.824202	-1.800890	-2.243204
x(22)=	.017037	-.720877	-1.589511	-1.526544
x(23)=	.004278	-.609426	-1.351583	-.826777
x(24)=	.000000	-.491755	-1.092789	-.194187
x(25)=	.004278	-.369879	-.820315	.327083
x(26)=	.017037	-.245877	-.542150	.706074
x(27)=	.038060	-.121879	-.266308	.929080
x(28)=	.066987	.000000	.000000	1.000000
x(29)=	.103323	.117671	.250816	.937091
x(30)=	.146447	.229123	.481698	.767967
x(31)=	.195619	.332444	.689610	.524438
x(32)=	.250000	.425874	.872727	.238348
x(33)=	.308658	.507807	1.030046	-.060996
x(34)=	.370591	.576847	1.161106	-.348167
x(35)=	.434737	.631808	1.265666	-.601910
x(36)=	.500000	.671751	1.343502	-.804999
x(37)=	.565263	.695995	1.394248	-.943927
x(38)=	.629410	.704122	1.417292	-1.008717
x(39)=	.691342	.695994	1.411768	-.993090
x(40)=	.750000	.671751	1.376594	-.895012
x(41)=	.804381	.631808	1.310599	-.717668
x(42)=	.853553	.576846	1.212734	-.470724
x(43)=	.896677	.507808	1.082396	-.171581
x(44)=	.933013	.425873	.919800	.153968
x(45)=	.961940	.332445	.726396	.472349
x(46)=	.982963	.229122	.505206	.744767
x(47)=	.995722	.117671	.260970	.931894

Коефіцієнт індуктивного опору  $C_X =$     - .74079  
 Коефіцієнт підйимальної сили     $C_Y =$     2.98451  
 Коефіцієнт моменту     $C_MZ =$     1.41764

2. Циркуляція вектора швидкості навколо профілю = -1.63695

Кут атаки = 5.00000  $e_1 = .05000$   $e_2 = .04500$

	$V_\theta$	Фіз комп	$C_p(\theta)$ :
	(10)		
x( 1)=	.995722	-.076571	-.934296
x( 2)=	.982963	-.149129	-1.079644
x( 3)=	.961940	-.219635	-1.115813
x( 4)=	.933013	-.287112	-1.131599
x( 5)=	.896677	-.350499	-1.141858
x( 6)=	.853553	-.408760	-1.150409
x( 7)=	.804381	-.460925	-1.158562
x( 8)=	.750000	-.506119	-1.166888
x( 9)=	.691342	-.543580	-1.175725
x( 10)=	.629410	-.572679	-1.185337
x( 11)=	.565263	-.592915	-1.195959
x( 12)=	.500000	-.603955	-1.207910
x( 13)=	.434737	-.605608	-1.221563
x( 14)=	.370590	-.597855	-1.237447
x( 15)=	.308658	-.580821	-1.256276
x( 16)=	.250000	-.554811	-1.279152
x( 17)=	.195619	-.520258	-1.307697
x( 18)=	.146447	-.477767	-1.344622
x( 19)=	.103323	-.428051	-1.394510
x( 20)=	.066987	-.371979	-1.466087
x( 21)=	.038060	-.310502	-1.577442
x( 22)=	.017037	-.244693	-1.771494
x( 23)=	.004278	-.175684	-2.143650
x( 24)=	.000000	-.104300	-2.086009
x( 25)=	.004278	-.030233	-.382429
x( 26)=	.017037	.039588	.289992
x( 27)=	.038060	.108363	.553418
x( 28)=	.066987	.174558	.689900
x( 29)=	.103323	.236920	.773068
x( 30)=	.146447	.294333	.829147
x( 31)=	.195619	.345794	.869655
x( 32)=	.250000	.390407	.900392
x( 33)=	.308658	.427407	.924601
x( 34)=	.370591	.456151	.944211
x( 35)=	.434737	.476153	.960456
x( 36)=	.500000	.487065	.974131
x( 37)=	.565263	.488705	.985775
x( 38)=	.629410	.481047	.995744
x( 39)=	.691342	.464227	1.004254
x( 40)=	.750000	.438536	1.011391
x( 41)=	.804381	.404424	1.017109
x( 42)=	.853553	.362487	1.021141
x( 43)=	.896677	.313460	1.022816
x( 44)=	.933013	.258210	1.020517
x( 45)=	.961940	.197737	1.009859
x( 46)=	.982963	.133180	.975572
x( 47)=	.995722	.065917	.833812

Коефіцієнт індуктивного опору  $C_X = -.05905$   
 Коефіцієнт підйимальної сили  $C_Y = .71109$   
 Коефіцієнт моменту  $CM_Z = .21811$

Обчислення проводились для фіксованого кута атаки  $\alpha = 10^\circ$  та  $\varepsilon_1 = 0.05$  при різних значеннях  $\varepsilon_2$ , що моделює зміну аеродинамічних характеристик лопатей за

рахунок зношення матеріалу. Результати обчислень коефіцієнта індуктивного опору  $C_x$ , коефіцієнта підйимальної сили  $C_y$  та коефіцієнта моменту  $C_{mz}$  наведені в таблиці 1.

**Таблиця 1 – Зміна аеродинамічних характеристик в процесі зносу лопатей**

$\varepsilon_2$	$C_x$	$C_y$	$C_{mz}$
0,048	-0,22803	1,255	0,36
0,044	-0,25816	1,3977	0,425
0,040	-0,30050	1,56443	0,5028
0,036	-0,35728	1,765	0,5938
0,032	-0,4346	2,0154	0,7063
0,028	-0,54488	2,3378	0,7736
0,024	-0,70997	2,77105	1,0433
0,02	-0,97416	3,3903	1,31699
0,016	-1,45381	4,38301	1,75319
0,012	-2,65	6,47	3,75

Результати розрахунків показують, що значення аеродинамічних характеристик залежать від початкової форми профілю та характеру зносу. Крім того, досліджено залежність аеродинамічних характеристик в залежності від ексцентриситету еліпса при значенні кута атаки  $\alpha = 10^\circ$ , підтверджено наявність критичних точок обтікання та характер зміни параметрів течії [5]. Результати наведено в таблиці 2.

моделювати обтікання при критичних значеннях кута атаки (ріст значень характеристик в даному випадку при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.028$ ), а також зникнення підйимальної сили, обертового моменту та опору при малих товщина еліпса (фактично мова йде про обтікання відрізка нульової товщини). Вказані розрахунки можна проводити при різних значеннях кута  $\alpha$ , а також малих півосей  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

За результатами розрахунків можна зробити наступні висновки: розроблений чисельний алгоритм дозволяє враховувати та

**Таблиця 2 – Залежність аеродинамічних параметрів лопаті при різних значеннях малої напівосі лопаті**

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$	$C_x$	$C_y$	$C_{mz}$
0,05	-0,20813	1,191	0,3352
0,044	-0,21581	1,209	0,3367
0,04	-0,2305	1,253	0,35754
0,036	-0,2704	1,39	0,42115
0,030	-0,82016	2,96	1,139
0,029	-1,7227	1,78	1,932
0,028	-16,828	16,901	7,55
0,026	-0,1017	-2,83	-1,54
0,02	-0,07319	-0,426	-0,58
0,01	-0,00897	0,0052	0,0029

Достовірність одержаних результатів підтверджується проведенням порівняльних розрахунків за різними відомими моделями, крім того, проведено розрахунки еліптичних

профілів при нульовому куті атаки – при цьому одержано відомі співвідношення:  $C_x = C_y = C_{mz} = 0$ . Всі одержані результати стосуються випадків, коли профіль лопаті



задається аналітично у вигляді (1, 23). Проте в реальному випадку координати профілю лопаті задаються у вигляді таблично заданої функції  $(x_i, y_i) i=1, \dots, N$ , де  $N$  - кількість контрольних точок по профілю лопаті. Необхідно встановити відповідність між вказаними координатами та кутом  $\theta$ . Координати  $x_i$  дозволяє однозначно відтворити залежність  $x = x(\theta)$  та визначити координати  $\theta_i$  відповідних точок:

$$x_i = \cos^2 \frac{\theta_i}{2} \Rightarrow \theta_i = 2 \arccos \sqrt{x_i}, \quad (24)$$

при цьому буде витримано відповідний масштаб. Залежність  $y(\theta)$  відновлюється або з використанням апарату інтерполяції (інтерполяційного кубічного згладжуючого сплайну [6, 9]), або шляхом моделювання профілю лопаті еліптичною конфігурацією за методом найменших квадратів з використанням координат точок, визначених експериментально  $(x_i, y_i)$ :

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad (25)$$

$$\text{де } A = \frac{1}{a^2}; B = \frac{1}{b^2}$$

$$A = \frac{\sum y_i^4 \sum x_i^2 - \sum y_i^2 \sum x_i^2 y_i^2}{\sum x_i^4 \sum y_i^4 - (\sum x_i^2 y_i^2)^2} \quad (26)$$

$$B = \frac{\sum x_i^4 \sum y_i^2 - \sum x_i^2 y_i^2 \sum x_i^2}{\sum x_i^4 \sum y_i^4 - (\sum x_i^2 y_i^2)^2} \quad (27)$$

Слід зазначити, що використання підходу (25) – (27) дозволяє вирішити проблему регуляризації значень першої та другої похідної, які входять в (17) – (18) (друга похідна виникає після застосування правила Лопітала у випадку  $\theta = \theta_0$ ), оскільки використання інтерполяційних кубічних сплайнів без згладжування для даних, що визначаються з певною похибкою, призводить до суттєвих похибок саме при визначенні значень першої та другої похідної [7]. Розглянутий в роботі підхід, пов'язаний з використанням інтегральних рівнянь, є обґрунтованим, оскільки операція інтегрування вимагає значно сильніших умов, що накладаються на функцію, ніж операція інтегрування [4], це ж стосується і відповідних чисельних процедур – похибка при чисельному диференціюванні завжди вища, ніж при чисельному інтегруванні, строго математично

можна показати, що операція чисельного диференціювання є некоректною [6]. Проблемою при використанні (25) – (27) є оцінка похибки при наближенні функції, яка задається таблично  $(x_i, y_i)$  залежністю (24). Для ефективного використання наведених методів розрахунку параметрів обтікання профілю лопаті необхідно вирішити проблему встановлення координат  $(x_i, y_i)$  апаратними засобами, оскільки при використанні інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду геометричні характеристики профілю є основними вхідними даними задачі. При цьому важливого значення набуває точність визначення вказаних координат, оскільки елементи конструкції технологічного обладнання для виробництва цукру мають невеликі лінійні розміри і в такому випадку необхідно забезпечувати достатню гладкість функцій  $x(\theta), y(\theta)$ , які моделюють конфігурацію досліджуваних профілів. Це, зокрема, є важливим тих випадках, коли для оцінки технічного стану досліджуваних об'єктів визначаються крім наведених вище характеристик, додатково і площі поперечних перерізів деформованих профілів, і моменти інерції вказаних профілів відносно відповідних осей [4] – наприклад, для оцінки параметрів їх вимушених коливань, вібрацій, оцінки можливості виникнення резонансних та передрезонансних явищ.

Подальші дослідження можуть бути продовжені в плані розробки методів визначення координат відповідних деформованих профілів та вибору методів апроксимації (інтерполяції) цих профілів з урахуванням властивостей геометрії профілів. При цьому слід враховувати конструктивні особливості двобарабанної сушильно-охолоджувальної установки, та її складових частин, які зазнають дії аеродинамічних навантажень - двох технологічних вентиляторів та сушильного та охолоджувального барабанів – режими роботи, лінійні розміри, геометричну конфігурацію, термін експлуатації, форми перерізів лопаток та лопатей та їх зміну по довжині, наявність кручення, а також зміну геометричних характеристик лопатей з часом експлуатації. Така інформація може бути одержана за результатами періодичних

технічних оглядів обладнання, які проводяться згідно з існуючими регламентами таких робіт. Зокрема, в тих випадках, коли функція  $f(\theta)$  є такою, що на рис.1 нижня поверхня профіля перетинає вісь  $Ox$ , і одному значенню кута  $\theta$  відповідають дві точки профілю, для одержання однозначного відображення вводиться новий параметр – замість кута  $\theta$  використовується довжина дуги  $S$  між задньою границею профіля та заданою точкою [4]. Крім того, представлена методика може бути використана, якщо профіль, зображений на рис. 1, представляється як комбінація чотирьох секцій – дві з них – ті, що прилягають до передньої границі крила – є секторами еліпса з різними півосями, інші дві моделюються многочленами Ерміта, що дозволяє задавати умови спряження вказаних секцій та враховувати кут між дотичними на задній границі профіля.

Заслуговує подальшого вивчення питання оцінки впливу нестационарних аеродинамічних ефектів – подана в пропонованій роботі модель стосується ізольованого профілю, на який набігає стаціонарний потік зі сталою швидкістю  $V_\infty$ . Реальна ж вентиляторна установка працює в умовах, коли кожна лопать зазнає аеродинамічної інтерференції від інших лопатей, які збурюють потік газу, при цьому виникають супутні вихорові шари за кожною лопаттю, і фактично для кожної з лопатей швидкість набігаючого потоку є відмінною від початкової  $V_\infty$ , вона може в найпростіших випадках моделюватись деякою функцією від часу, а пропонована модель повинна бути уточнена з урахуванням конфігурації, інтенсивності та зони дії супутнього вихорового шару за кожною з лопатей. З математичної точки зору це вимагатиме вивчення можливості застосування апарату інтегральних рівнянь Фредгольма II роду для вирішення нестационарної задачі аеродинаміки, вдосконалення пропонованого в роботі підходу з точки зору урахування вказаних нестационарних ефектів. Врахування цих особливостей в меншій мірі стосується лопаток сушильного та охолоджувального барабанів, проте це питання вимагає подальшого детального вивчення.

1. *Аналіз процесів експлуатації обертових об'єктів складної просторової конфігурації та методів оцінки їх тенічного стану..* - / Г. В. Григорчук, Л. І. Григорчук, В. Л. Григорчук // - *Методи та прилади контролю якості*, № 1(38), 2017, ст 103 -111.

2. *Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел.* / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Нишит, Р.М. Федоров.; под ред. С.М. Белоцерковского. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988 – 232с.

3. *Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.* / К.Флетчер – М.: Мир, 1988 – 352 с.

4. *Зорич В.А. Математический анализ.* / В.А.Зорич. – М.: Наука, 1981, 1984 – ТТ.1,2 – 1084с.

5. *Седов Л.И. Механика сплошных сред* /Л.И.Седов. – М.: Наука, 1984 – Т.2 – 574с.

6. *Самарский А.А. Численные методы* / А.А.Самарский, А.В.Гулин. – М.: Наука, - 1989 – 432с.

7. *Шкадов В.Я. Применение численных методов к расчету аэродинамики элементов летательных аппаратов.* [В.Я. Шкадов, А.А. Зайцев, А.М. Комаров и др.]: Отчет механико – математического факультета МГУ. 1983. - №3. – 87 стр.

8. *Лаврентьев М.А. Методы функции комплексного переменного.* / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 688 с.

9. *Олійник А.П. Математичні моделі процесу квазістаціонарного деформування трубопровідних та промислових систем при зміні їх просторової конфігурації: Наукове видання* / А.П. Олійник – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010 – 320с.

**Поступила в редакцію 01.12.2018 р.**  
**Рекомендували до друку: докт.техн.наук, проф. Костишин В. С., докт. техн. наук, проф. Горбійчук М. І.**