8. Чекурін В. До побудови програмної системи для моделювання та оптимізації процесів транспортування природного газу// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2007, №5,- С. 158-169.

9. Чекурін В. Ф., Притула М. Г., Химко О. М. Структура та функції інтегрованого програмно-технічного комплексу для автоматизації управління газотранспортною системою // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Автоматика, вимірювання та керування . - 2013. -№ 774.-С.51-60.

10. Чекурін В., Притула М., Химко О. Математична модель структури газотранспортної системи// Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології . - 2013. - № 771. - С. 187-196.

11. Чекурін В., Притула М., Химко О. Моделювання архітектури та функціональності програмно-технічного комплексу для автоматизації управління магістральними газопроводами// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2013, №18,- С. 209-218.

12. Чекурін В.Ф., Притула М.Г., Химко О.М. Методологія MES і комп'ютеризація управління ГТС// Вісник Національного університету „Львівська політехніка". Комп'ютерні системи та мережі//2014, №806.– 275-283.

УДК 621.372.061:517.3

МАСОПЕРЕНОС В ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТАХ ГАЗОТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ. ФРАКТАЛЬНИЙ ПІДХІД

Я.Д. Пянило, Н.Б.Лопух
Центр математичного моделювания Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України Вул.Дж. Дудаєва,15 м. Львів Україна Тел.. 261-18-86
email:pjanylo@cmm.lviv.ua

Вступ. Актуальною проблемою математичного моделювання є проблема адекватності математичних моделей досліджуваним об'єктам. Очевидно, що повний опис природних процесів і полів способом сучасного математичного моделювання неможливо тільки за допомогою формул класичної математики. Новий імпульс розвитку теорії складних систем дала ідея самоподібності (автомодельності, скейлінга). На ідеї самоподібності виросла концепція фракталів, яка є основою молодої теорії хаосу, та й цілком «дорослі» напрями природничих наук - від космології до фізики мікросвіту - наскрізь просякнуті ідеєю самоподібності.

Теорія фракталів розглядає замість цілочисельних мір - дробові і базується на нових кількісних показниках у вигляді дробових розмінностей D і відповідних фрактальних сигнатур. Відносно дробових операторів можна відзначити наступне. Задовго до введення поняття динамічної системи дробового порядку і появи праць про фрактальну природу реальних об'єктів, було відмічено, що поведінка деяких процесів і об'єктів (поширення тепла, в'язкопружні властивості матеріалів, дифузія та ін.) не вкладається в рамки традиційного опису за допомогою диференціальних рівнянь цілого порядку. Більш точно ці процеси і об'єкти кількісно описуються операторами дробового інтегродиффеpенціювання (ДІД), ${}^{c}D_{\tau}^{\alpha}$ де $-1<\alpha<1$.

Похідна дробового порядку - це нелокальна характеристика функції, яка залежить не тільки від поведінки функції в околиці даної точки x, але і від прийнятих нею значень на всьому інтервалі (a,x) (або (x,b)). Ця нелокальність означає, що зміна щільності потоку частинок залежить не тільки від її значень в околиці даної точки (як це має місце у випадку нормальної дифузії або класичної теплопровідності), але і від її значень у віддалених точках простору. Випадковий процес, швидкість зміни щільності якого залежить від значень щільності в попередні моменти часу, називається ередітарним. Такі процеси зручно описувати рівняннями, що містять дробову похідну за часом. Порядок похідної за часом визначається величиною α, що характеризує топологію даної множини.

Що стосується просторової дробової похідної, то вона входить до складу диференціального рівняння переносу, якщо розподіл Гаусса класичного броунівського руху замінити більш загальним стійким імовірнісним розподілом Леві. Експериментально доведено, що в деяких неоднорідних середовищах процеси переносу не можуть бути описані законом Фіка і рівнянням теплопровідності, експериментальні дані свідчать про наявність великих «хвостів», пов'язаних з польотами Леві. Останні відносяться до випадкових блукань зі зміщеннями частинок, розподілених у відповідності з стійкими законами Леві. Просторово-дробове рівняння аномальної теплопровідності (дифузії) можна отримати, виходячи з універсального рівняння (Паулі), або на підставі моделі випадкових блукань, переходячи до макромасштабних меж.

До числа відкритих і невирішених завдань, пов'язаних з дробовим інтегродиф-ференціювання, слід віднести: створення ефективних методів, алгоритмів і програм вирішення нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь нецілого порядку; розвиток числових методів, адаптованих до вирішення практичних завдань та їх реалізація; розробка методів вирішення та комп'ютерного моделювання інтегро-диференціальних рівнянь змінних нецілих порядків із заданими початковими і крайовими умовами; розвиток методів структурної і параметричної ідентифікації динамічних систем, математичні моделі яких містять інтегро-диференціальні оператори нецілих порядків, тощо.

Метою роботи є застосування дробового числення для дослідження процесів масопереносу в складних технологічних об'єктах газотранспортних систем, зокрема, руху газу в трубопроводах та фільтрації газу в пластах підземних сховищ.

Визначення дробових похідних. Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так:

$$ {}^{c}D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^{c}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_{0}^{\tau}\frac{\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}}d\xi , $$

де $m=[\alpha]$, $[\cdot]$ – ціла частина дійсного числа, а в термінахРіммана-Ліувіля -

$$ D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^{r}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\int_{0}^{\tau}\frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}}d\xi . $$

Між похідними Капуто іРіммана-Ліувіля має місце наступний зв'язок

$$ {}^{C}D_{\tau}^{\alpha}\varphi = D_{\tau}^{\alpha}\varphi - \sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\frac{\partial^{k}}{\partial\tau^{k}}\varphi . $$

Опис процесів масо переносу. Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням з дробовою похідною за часовою змінною

$$ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{l}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{l}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{l}}{\partial z}\right) = 2mh\left(\frac{{}^{c}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\left(\frac{p}{\chi}\right) + 2qp_{at}\right) $$

Моделювання процесу руху газу в трубопроводах. Процес руху газу в трубопроводах в нестаціонарному неізотермічному режимі описується взаємопов'язаною системою диференціальних рівнянь у дробових похідних

$$\frac{{}^{c}\partial^{\alpha}(\rho \upsilon)}{\partial \tau^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \rho \upsilon^{2}\right) = -\rho\left(\frac{\lambda \upsilon|\upsilon|}{2D} + g\frac{dh}{dx}\right).$$

$$\frac{{}^{c}\partial^{\alpha}\rho}{\partial \tau^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \upsilon) = 0,$$

$$\frac{{}^{c}\partial^{\alpha}(\rho E)}{\partial \tau^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x}\rho \upsilon\left(E + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{4k(T_{гр} - T)}{D} - \rho \upsilon g\frac{dh}{dx},$$

Обчислювальний експеримент. Апробація отриманих теоретичних результатів проводилась на даних Дашавського підземного сховища газу та трубопроводі, довжиною 100 км, діаметром 1.388 м. Результати обчислень подані на рис. 1 та рис.2.

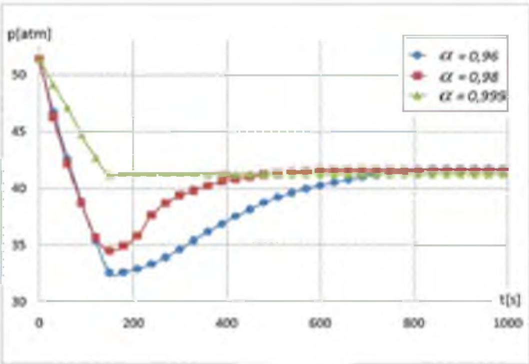

Рис.1. Значення тисків газу в околі свердловин для різних значень порядку дробової похідної α.

Висновки

З аналізу отриманих результатів випливає, що показник дробової похідної має значний вплив на параметри масопереносу.

Як видно з рис 1, застосування дробової похідної дає можливість біль адекватно описувати процес відбирання газу зі сховищ – падіння тиску в околі свердловини відбувається природним чином.

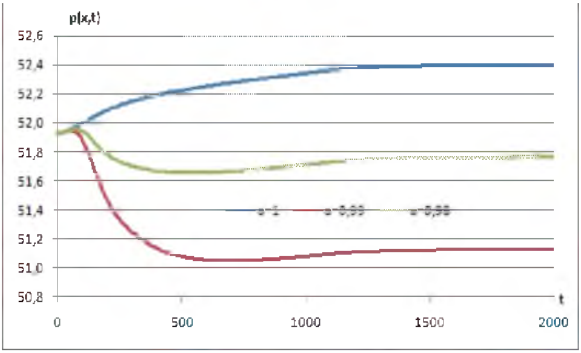

Рис.2. Значення тисків газу в трубопроводі, довжиною 100 км на віддалі 50 км від початку для різних значень порядку дробової похідної α .

Література

1. Самко С.Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложе-приложения. Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. В.В.Васильев,Л.А.Симак. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в модели-овании динамических систем. Научное издание НАН Украины, — Киев, 2008 — 256 с.
3. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка Научно-исследовательский ин-т приклад, математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. - М. : Наука, 2005. - 199 с.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.