МЕТОДИ І ПРИЛАДИ ВИМІРЮВАННЯ ВИТРАТИ РІДКОЇ І ГАЗОПОДІБНОЇ ФАЗ

УДК 51-74

DOI: 10.31471/1993-9981-2019-1(42)-39-46

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПЛОСКИХ ПОЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМПЛЕКСНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

В. П. Нісонський, Ю. В. Корнута, І.-М. Б. Катамай
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, nisonskiy1954@gmail.com

Досліджуються методами теорії функцій комплексної змінної із застосуванням теорії комплексного потенціалу, а також методами теорії поля деякі найбільш поширені та характерні типи плоских векторних полів з особливими точками, розміщеними в початку декартової системи координат. Розглянуто основні поняття теорії поля та векторного аналізу, які використовуються для дослідження векторних полів та основних числових характеристик цих полів.

Проведено дослідження найбільш поширених векторних полів з особливими точками чотирьох типів, а саме: джерело, вихор, вихороджерело, диполь. Наведено приклади комплексних потенціалів цих полів. Показано застосування комплексного потенціалу для знаходження основних характеристик векторних полів розглянутих типів, а саме їх дивергенцію і ротор. Знайдено та графічно побудовано з допомогою методу комплексного потенціалу еквіпотенціальні лінії та лінії течії векторних полів, що розглядаються. Досліджені з допомогою застосування методів векторного аналізу та методів теорії функції комплексної змінної (комплексного потенціалу) характеристики векторних полів можуть використовуватися для математичного моделювання різноманітних задач, що виникають при дослідженні пластів, а саме: в задачах фільтрації ґрунтових та пластових вод, а також в задачах дослідження течії рідини або газу в пластах.

Побудовані та розглянуті математичні моделі плоских векторних полів та знайдені числові характеристики цих полів можуть використовуватись для розв’язування і інших задач нафтогазового комплексу, які вимагають дослідження процесів течії рідин або газів у газо- чи нафтонесучих пластах.

Ключові слова: комплексний потенціал, векторне поле, характеристики векторного поля, дивергенція, ротор, еквіпотенціальні лінії, лінії течії, диполь.

Исследуются методами теории функций комплексного переменного с применением теории комплексного потенциала, а также методами теории поля наиболее распространенные и характерные типы плоских векторных полей с особыми точками, размещенными в начале декартовой системы координат. Рассмотрены основные понятия теории поля и векторного анализа, которые применяются для исследования векторных полей и основных численных характеристик этих полей.

Проведено исследование наиболее распространённых векторных полей с особыми точками четырёх типов, а именно: источник, вихрь, вихреисточник, диполь. Приведены примеры комплексных потенциалов этих полей. Показано применение комплексного потенциала для нахождения основных характеристик векторных полей рассмотренных типов, а именно: дивергенцию и ротор. Получены и графично построены с помощью метода комплексного потенциала эквипотенциальные линии и линии тока рассмотренных векторных полей. Исследованные с помощью применения методов векторного анализа и методов теории функции комплексного переменного (комплексного потенциала) характеристики векторных полей могут быть использованы для математического моделирования разнообразных задач, возникающих при исследовании пластов, а именно: в задачах фильтрации грунтовых и пластовых вод, а также в задачах исследования течения жидкости или газа в пластах.

Построенные и рассмотренные математические модели плоских векторных полей и найденные числовые характеристики этих полей могут быть использованы для решения и других задач нефтегазового комплекса, в которых требуются исследования процессов течения жидкостей или газов в газо- или нефтенесущих пластах.

Ключевые слова: комплексный потенциал, векторное поле, характеристики векторного поля, дивергенция, ротор, эквипотенциальные линии, линии тока, диполь.

Some of the most frequently encountered and generic types of plane vector fields with singular points at the origin of the coordinate system have been studied using complex variable theory methods combined with complex potential methods and field theory methods. The basic concepts of field theory and vector analysis, which are used to study vector fields and the main numerical characteristics of these fields, have been considered.

The study of the most frequently encountered vector fields with singular points of four types, namely the generator, the vortical point, the eddy source, the dipole, have been conducted. The application of the complex potential for finding the main characteristics of the vector fields of the considered types, namely their divergence and rotor, has been shown. Equipotential lines and streamlines of the considered vector fields have been obtained and graphically constructed using the method of complex potential. Studied using the vector analysis methods and the methods of the theory of complex variable functions (complex potential) characteristics of vector fields can be used for mathematical modeling of various problems, arising during the study of layers, namely soil and water reservoir filtration problems, as well as in studying the flow of fluid or gas in layers problems.

The developed and considered mathematical models of flat vector fields and the found numerical characteristics of these fields can be used to solve other problems of the oil and gas complex, which require studies of the flow of liquids or gases in gas- or oil-bearing beds.

Keywords: complex potential, vector field, vector field characteristics, divergence, rotor, equipotential lines, streamlines, dipole.

1. Задача дослідження

Стоїть задача діагностики і дослідження плоских стаціонарних векторних полів з допомогою векторних потенціалів, що має практичне значення при розробці газових і нафтових пластів, задач теорії фільтрації та побудові гідроекологічних моделей. Ці задачі є актуальними і особливо гостро повстали, починаючи з ІІ-ї половини XX століття. Питання діагностики навколишнього середовища, проблеми охорони води, повітря і ґрунтів особливо загострилися в останні десятиліття в зв'язку з забрудненням навколишнього середовища та кліматичними змінами, зумовленими індустріальною діяльністю людства. Збільшення антропогенного тиску на навколишнє середовище зумовлене все більшою технічною та енергетичною озброєністю людства. Це веде до все більших змін стану біосфери, і багато з цих змін носить негативний характер. Починаючи з Ламарка, що ввів поняття біосфери, через В. І. Вернадського, який заклав основи екології, до наших часів значна кількість дослідників займалася проблемами екології. Можна назвати імена таких учених, як В. В. Докучаєв, Г. Ф. Морозов, В. Н. Сухонцов, А. А. Дородніцин, Н. Н. Мойсеєв, Л. М. Горєв, В. І. Коваленко, В. І. Лаврик та інші.

Задачею даного дослідження є побудова математичних моделей деяких плоских векторних полів з допомогою комплексного потенціалу та знаходження основних характеристик цих полів. Такі дослідження можуть мати практичне застосування в багатьох питаннях як промислового використання при дослідженнях покладів вуглеводів, так і в питаннях захисту екосистем, задачахфільтрації та інших.

2. Основні поняття теорії поля

Як відомо, основними поняттями скалярного плоского поля *u(x,t)* є $\overline{grad u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} \equiv \nabla u$, похідна по напрямку $\bar{l}$ потенціальної функції *u(x,y)*: $\frac{\partial u}{\partial l} = (\overline{gradu}, \overline{l^0})$, де $\overline{l^0}$ – одиничний вектор напрямку l^0, $(\overline{gradu}, \overline{l^0})$– скалярний добуток $\overline{gradu}$ і вектора $\overline{l^0}$. Тоді похідна по напрямку нормалі до еквіпотенціальної лінії *u(x,y)=c*буде $\frac{\partial u}{\partial n} = (\overline{gradu}, \overline{n^0})$, де $\overline{n^0}$ – одиничний вектор нормалі.

Для векторного поля $A(A_x, A_y)$, де $A_x = P(x,y), A_y = Q(x,y)$, властиві векторні лінії, або лінії течії вектора *A*, тобто лінії, в кожній точці яких вектор A є дотичною до відповідної лінії. Рівняння цих векторних ліній є

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y} \quad (1).$$

Потоком векторного поля Aчерез криву C є інтеграл

$$N=\int_C (A,\overline{n^0})ds \quad (2),$$

де ds – диференціал дуги кривої C. Як відомо, в комплексній формі $\overline{s^0}ds=dx+idy$, $\overline{s^0}ds=-i\overline{s^0}ds=dx-idy$, тоді $(A,\overline{n^0})ds=A_x dy-A_y dx$, тобто (1) приймає вигляд

$$N=\int_C A_x dy-A_y dx \quad (3).$$

Дивергенцією поля A для замкненої кривої C, коли C стягується до z , є

$$divA=\lim_{c\to z}\frac{1}{s}\int_C (A,\overline{n^0})ds \quad (4).$$

Як відомо,

$$divA=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y} \quad (5).$$

Точка поля, в якій $divA\neq 0$, називається джерелом (або витоком) при $divA>0$ і стоком при $divA<0$. Якщо в кожній точці деякої області D , обмеженої замкненою кривою C,

$$divA=0 \quad (6),$$

то векторне поле називається соленоїдальне в деякій області. У такому полі потік через замкнену лінію C, внутрішня область D якої належить полю A, дорівнює нулю, що випливає з відомої теореми Остроградського (або формули Гріна)

$$\int_C (A,\overline{n^0})ds=\iint_D divAds \quad (7),$$

де ds – елемент області D.

З умови соленоїдальності (6) випливає, що вираз $-A_y dx+A_x dy$ є диференціалом деякої функції $v(x,y)$, яка називається функцією течії. Лінії рівня функції $v(x,y)$ є лініями течії вектора A. Дійсно, з того, що

$$dv=-A_y dx+A_x dy=0 \quad (8)$$

випливає, що $\frac{dy}{dx}=\frac{A_y}{A_x}$, або умова (1).

Із формули (8) випливає, що

$$\frac{dv}{dx}=-A_y;\frac{dv}{dy}=A_x, \quad (9).$$

Функцію $v(x,y)$ можна відновити (з точністю до константи) по повному диференціалу dv:

$$v(x,y)=\int_C -A_y dx+A_x dy+const \quad (10).$$

У силу умови (6) цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

У соленоїдальному полі потік через лінію C згідно формул (3) та (10) дорівнює приросту функції течії $v(x,y)$ у кінцях дуги C:

$$N=\int_{z_1}^{z_2}{}_C -A_y dx+A_x dy=\int_{z_1}^{z_2}{}_C dv=v(z_2)-v(z_1) \quad (11).$$

Циркуляцією Γ поля A вздовж замкненого контура C називається інтеграл

$$\Gamma=\oint_C (A,\overline{s^0})ds=\oint_C A_x dx+A_y dy \quad (12).$$

Ротором (або вихором) поля A називається границя відношення циркуляції вздовж C при умові, що C зтягується до точки z:

$$rotA=\lim_{c\to z}\frac{1}{s}\int_C (A,\overline{s^0})ds \quad (13).$$

Як відомо,

$$\overline{rotA}=(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\overline{k} \quad (14),$$

де $\overline{k}$ – одиничний вектор, ортогональний площині поля A .

Точка поля, в якій $\overline{rotA}\neq 0$, називається вихором поля (або збуренням) A в цій точці.

Якщо в кожній точці поля деякої області *D*, де задано поле *A*,

$$\overline{rotA} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0 \qquad (15),$$

то поле називається потенціальним в області *D*. У такому полі циркуляція вздовж будь-якої замкненої лінії *C* дорівнює нулю, що випливає із відомої формули Рімана-Гріна:

$$\oint_C (A, \overline{s^0})ds = \iint_D rotAds \qquad (16).$$

Умова (15) і означає, що $du = A_x dx + A_y dy$, тобто

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}; A_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ A = \overline{gradu} \qquad (17).$$

Тоді

$$u(x,y) = \int_{z_0}^{z} {}_L A_x dx + A_y dy + const \qquad (18).$$

Інтеграл (18) не залежить від шляху інтергування. Якщо в області *D* поле є одночасно і соленоїдальним і потенціальним, тобто виконуються умови (6)і (15), то з порівняння (9) і (17) отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (19).$$

Умови (19) називаються умовами або рівняннями Коші-Рімана (C.-R.). Таким чином, у плоскому полі, яке є одночасно соленоїдальним і потенціальним (таке поле називається гармонічним), функція течії $v(x,y)$і функція потенціалу $u(x,y)$є спряженими гармонічними функціями деякої функції комплексної змінної. У такому полі лінії течії й еквіпотенціальні лінії утворюють ортогональні сімейства.

Функція комплксної змінної

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \qquad (20)$$

називається комплексним потенціалом поля. *f(z)* є аналітичною функцією. Із допомогою комплексного потенціалу знаходяться всі основні величини, що характеризують векторне поле *A*.

З формул (17), (19) і формули для похідної аналітичної функції *f(z)* отримаємо:

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)} \qquad (21),$$

де $\overline{f'(z)}$ – спряжена аналітична функція до похідної $f'(z)$. З того, що $f'(z)dz = (A_x - iA_y)\cdot(dx + idy)$ (бо $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ – з умов C.–R.) випливає, що формули (3) і (12) можна переписати:

$$N = \operatorname{Im}\int_C f'(z)dz; \varGamma = \operatorname{Re}\int_C f'(z)dz \qquad (22),$$

або

$$\varGamma + iN = \int_C f'(z)dz \qquad (23).$$

3. Деякі типи плоских векторних полів

1. Джерело.

Нехай поле *A* має одне точкове джерело, яке розміщене в початку координат. Таке поле можна уявити і як просторове поле, що виникає під дією джерел, рівномірно розміщених вздовж прямої, ортогональної до площини *(z)* в початку координат. Такі поля можуть описувати витік рідини або газу з точки початку координат.

З міркувань симетрії зрозуміло, що поле *A* має вигляд:

$$A = \varphi(r)\cdot\overline{r^0} \qquad (24),$$

де, $|\bar{r}| = r = |z|$ відстань від точки z до початку координат; $\overline{r^0} = \frac{z}{|z|}$ – одиничний вектор, що направлений від початку координат до точки z. Тоді потік вектора через будь-яку коло радіуса r з центром в початку координат:

$$\mathrm{N} = \oint_{|z|=r} (A, \overline{r^0})ds = \varphi(r)\cdot 2\pi r$$

Потік не повинен залежати від радіуса кола, бо з формули Остроградського (7), застосованої до кільця $r_1 < |r| < r_2$, отримаємо:

$$\oint_{|z|=r_2} (A, \overline{r^0})ds - \oint_{|z|=r1} (A, \overline{r^0})ds = \iint_{r_1<|z|<r_2} divAds = 0,$$

тому що $\overline{rotA} = 0$, з цього випливає, що величина потоку N є сталою, а це означає, що

$$\varphi(r) = \frac{N}{2\pi r} \qquad (25).$$

Число N називається інтенсивністю джерела. Якщо підставити $\varphi(r)$ в (24), отримаємо:

$$\mathrm{A} = \frac{N}{2\pi r} \cdot \overline{r^0} = \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{1}{\bar{\bar{z}}} \qquad (26),$$

де $\overline{r^0} = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{r}$, $\quad \bar{z} = x - iy$.

З (21) знайдемо похідну комплексного потенціалу:

$$f'(z) = A = \frac{N}{2\pi} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\bar{\bar{z}}}\right)} = \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}$$

Тоді

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} Lnz + C \qquad (27),$$

де $C = C_1 + iC_2$.

Якщо відокремити дійсну і уявну частину *f(z)*, з (20) при умові *c=0* отримаємо:

$$u = \frac{N}{2\pi} \ln|z|, \; v = \frac{N}{2\pi} Argz \qquad (28).$$

На рис. 1 суцільні лінії – лінії течії поля *A*, пунктирні лінії – еквіпотенціальні лінії.

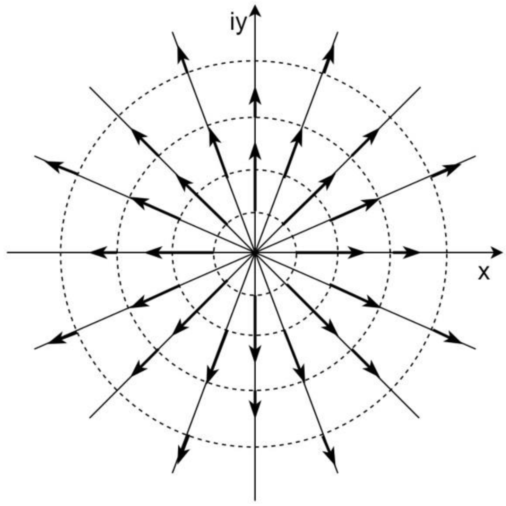

Рисунок 1 – Еквіпотенціальні лінії та лінії течії для джерела.

$$u = \frac{N}{2\pi} \ln|z|;$$

Знайдемо $\overline{rotA}$.

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N}{2\pi}\ln(x^2 + y^2)\right] = \frac{N}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$A_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{N}{2\pi}\ln(x^2 + y^2)\right] = \frac{N}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$rotA = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{N}{2\pi}\left(-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) = 0,$$

що і повинно бути. Джерело не має вихора.

2. Вихор

Якщо $Г$ – циркуляція поля A по будь-якому замкненому контуру навколо вихрової точки, розміщеної в початку координат, то

$$A = \frac{Г}{2\pi}\frac{i}{\overline{\overline{z}}} \qquad (29),$$

де $Г$ – інтенсивність вихору.

Так як комплексний потенціал відрізняється від попереднього множенням на i , то

$$f(z) = \frac{Г}{2\pi i}Lnz + C;\ u = \frac{Г}{2\pi}Argz + C_1;$$

$$v = -\frac{Г}{2\pi}\ln|z| + C_2 \qquad (30),$$

тобто потенціальна функція і функція течії міняються місцями у порівнянні з попереднім випадком джерела. Константу C в (30) можна прийняти за 0. Тоді лінії цього поля будуть:

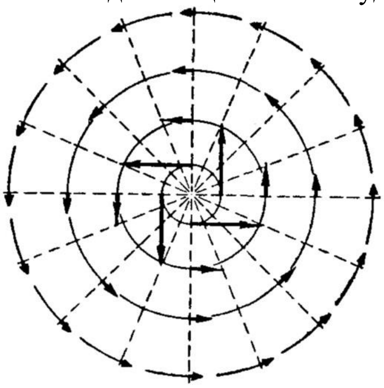

Рисунок 2 – Еквіпотенціальні лінії та лінії течії для вихора.

Знайдемо дивергенцію для вихору:

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Г}{2\pi}arctg\frac{y}{x}\right] = -\frac{Г}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$A_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Г}{2\pi}arctg\frac{y}{x}\right] = \frac{Г}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$divA = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y};$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{Г}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{Г}{2\pi}\cdot\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{Г}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{Г}{2\pi}\cdot\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

тобто *divA=0*, що і повинно бути.

3. Вихороджерело

Розглянемо випадок, коли в початку системи координат зосереджені джерело інтенсивності N і вихор інтенсивності $Г$. Вектор поля А і комплексний потенціал f(z) додаванням двох попередніх випадків.

Отримаємо:

$$A = \frac{N+iГ}{2\pi}\cdot\frac{1}{\overline{\overline{z}}} \qquad (31)$$

$$f(z) = \frac{N-iГ}{2\pi}Lnz \qquad (32)$$

Розглянемо полярні координати $z = re^{i\varphi}$. Тоді з (28), (30) отримаємо лінії рівного потенціалу та лінії течії.

$$Г\ln z - N\varphi = C_1,\quad N\ln z - Г = C_2$$

Ці лінії утворюють ортогональні сімейства логарифмічних спіралей (ис. 3).

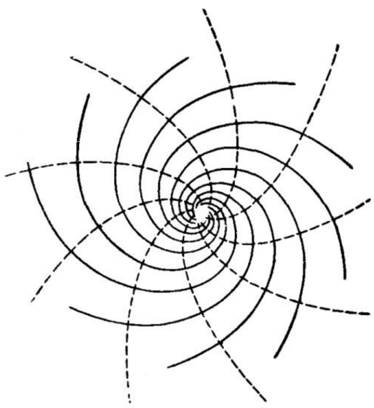

Рисунок 3 – Еквіпотенціальні лінії та лінії течії для вихороджерела.

Знайдемо $\overline{rotA}$ і $divA$ для (31).

$$A=\frac{N+i\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{x-iy}=\frac{N+i\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{x+iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{Nx-\Gamma y}{x^2+y^2}+\frac{i}{2\pi}\cdot\frac{\Gamma x+Ny}{x^2+y^2}.$$

Тоді

$$A_x=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{Nx-\Gamma y}{x^2+y^2};\ A_y=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\Gamma x+Ny}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-N(x^2-y^2)+2\Gamma xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{N(x^2-y^2)-2\Gamma xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Тоді

$$divA=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{-Nx^2+Ny^2+2\Gamma xy+Nx^2-Ny^2-2\Gamma xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

Аналогічно

$$\frac{\partial A_x}{\partial y}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\Gamma(y^2-x^2)-2Nxy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-\Gamma(x^2-y^2)-2Nxy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$rotA=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-\Gamma x^2+\Gamma y^2-2Nxy-\Gamma y^2+\Gamma x^2+2Nxy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

Таким чином, в області, що не включає особливу точку 0, поле *A* є соленоїдальне і потенціальне, тобто гармонічне.

4. Диполь

Диполь – це система джерела і стоку однаковою інтенсивністю, тобто сумарний вихідний потік вектора *Ф* за додатній час дорівнює сумарному вхідному потоку в точку, що знаходиться в околі точки вихідного потоку. Будемо вважати, що інтенсивність потоку джерела дорівнює +*N*, а інтенсивність потоку стоку відповідно –*N*. Приймемо, що джерело вектора *A* знаходиться в точці $z_1=-h$, а джерело стоку в точці $z_2=0$. Тоді комплексний потенціал системи отримаємо додаванням комплексних потенціалів джерела та стоку, тобто, виходячи з формули (27),

$$f(z)=\frac{N}{2\pi}Ln(z+h)-\frac{N}{2\pi}Lnz \qquad (33)$$

Тепер перейдемо до границі при $h\to 0$ і одночасно $N\to\infty$, так, що

$$Nh\to p=const \qquad (34)$$

Тоді така особлива точка. яка отримується при $h\to 0$, називається точковим диполем з моментом *p*. Тоді точковий потенціал поля знаходиться:

$$f(z)=\lim_{h\to 0}\frac{Nh}{2\pi}\cdot\frac{Ln(z+h)-Lnz}{h}=\frac{p}{2\pi}\cdot\frac{d}{dz}Lnz=\frac{p}{2\pi z} \qquad (35).$$

З формули (35) випливає:

$$\frac{p}{2\pi z}=\frac{p(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)}=\frac{px}{2\pi(x^2+y^2)}-i\frac{py}{2\pi(x^2+y^2)}$$

Тобто $u=\frac{px}{2\pi(x^2+y^2)}$; $v=-\frac{py}{2\pi(x^2+y^2)}$.

Тоді еквіпотенціальні лінії $u=const$, тобто $\frac{px}{2\pi(x^2+y^2)}=C$ – кола з зміщеними центрами по вісі *Ox* і змінними радіусами. Усі ці кола проходять через точку 0.

Аналогічно, з $v=const$ випливає, що $\frac{py}{2\pi(x^2+y^2)}=C$ – кола з зміщеними центрами по вісі *Oy* і змінними радіусами, які також проходять через точку 0.

Знайдемо *A* диполя:

$$A = \overline{f'(z)},\ f'(z) = -\frac{p}{2\pi}\left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right],$$

тобто

$$A_x = \frac{p}{2\pi}\cdot\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$A_y = -\frac{p}{\pi}\cdot\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Тоді:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{p}{\pi}\cdot\frac{x^3 + xy^2}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{p}{\pi}\cdot\frac{3x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{p}{\pi}\cdot\frac{3x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{p}{\pi}\cdot\frac{3xy^2 - x^3}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Тоді

$$divA = \frac{4p}{\pi}\cdot\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$rotA = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

тобто в області, що не включає точку 0, $divA \neq 0$, а $rotA = 0$ – поле є потенціальне.

Висновки

У даному дослідженні показано, як обчислювати основні характеристики векторного поля – дивергенцію та ротор для деяких характерних векторних полів з типовими особливими точками з допомогою комплексного потенціалу. Результати досліджень можна використовувати для побудови математичних моделей процесів, для яких характерна наявність плоских векторних полів, а саме для задач гідромеханіки, фільтрації, фізики пласта.

Література

1. Булах Е. Г., Шуман В. Н. Основы векторного анализа и теория поля: монографія. Киев: Наукова думка, 1998. 340 с.
2. Горев Л. Н., Коваленко П. Н., Лаврик В. И. Гидроэкологические модели. Процессы и прогнозирование: м онографія. Книга 1. Киев: Аграрна наука, 1999. 440 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного: монографія. Москва: Наука, 1973. 736 с.
4. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрациин: монографія. Киев: Наукова думка, 1974. 200 с.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций: монографія. Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 704 с.

References

1. Bulah E. G., Shuman V. N. Osnovy vektornogo analiza i teoriya polya: monografiya. Kiev: Naukova dumka, 1998. 340 s.
2. Gorev L. N., Kovalenko P. N., Lavrik V. I. Gidroekologicheskie modeli. Processy i prognozirovanie: m onografiya. Kniga 1. Kiev: Agrarna nauka, 1999. 440 s.
3. Lavrentev M. A., Shabat B. V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo: monografiya. Moskva: Nauka, 1973. 736 s.
4. Lyashko I. I., Velikoivanenko I. M., Lavrik V. I., Misteckij G. E. Metod mazhorantnyh oblastej v teorii filtraciin: monografiya. Kiev: Naukova dumka, 1974. 200 s.
5. Markushevich A. I. Teoriya analiticheskih funkcij: monografiya. Moskva – Leningrad: GITTL, 1950. 704 s.