УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТОГО ЗА РАДІАЛЬНОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

І. І. Ракоча, **В. С. Попович

**Національний університет «Львівська політехніка»,*
***Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Знання про компоненти напружено-деформованого стану елементів мікроелектроніки при заданні силового та теплового навантажень лежать в основі їх розрахунку на міцність і надійність. Визначення температурного поля та спричиненого ним напружено-деформованого стану здійснюють на основі моделі термочутливого тіла [1, 2].

Розглядається безмежний по осі термочутливий порожнистий циліндр, який складається із п’яти шарів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявними у другому та четвертому шарах джерелами тепла, які розподілені за параболічним законом

$$W^{(2,4)}(r) = -\frac{4W_0^{(2,4)}}{\left(r_{3,5} - r_{2,4}\right)^2}\left(r - r_{2,4}\right)\left(r - r_{3,5}\right).$$

На внутрішній обмежувальній поверхні $r = r_1$ заданий сталий потік тепла q, а через зовнішню — $r = r_6$ циліндр конвективно обмінюється теплом із середовищем, температура якого $t = t_{зов}$. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний α. На межі дотику сусідніх шарів $r = \{r_2, r_3, r_4, r_5\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту. За таких умов ставиться завдання визначити розподіл температури та компонент напружено-деформованого стану циліндра.

Математична модель для визначення розподілу температури містить:

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dr}\right) = W^{(i)}(r), \qquad r_i < r < r_{i+1}, \qquad i = \overline{1,5}; \tag{1}$$

- крайові умови на обмежувальних циліндричних поверхнях

$$\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{dt_1}{dr}\bigg|_{r=r_1} = q, \quad \left[\lambda_t^{(5)}(t_5)\frac{dt_5}{dr} + \alpha\left(t_5 - t_{зов}\right)\right]_{r=r_6} = 0; \tag{2}$$

- умови контакту на поверхнях дотику сусідніх складових циліндра

$$t_i\big|_{r=r_{i+1}} = t_{i+1}\big|_{r=r_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}, \tag{3}$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dr}\bigg|_{r=r_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1})\frac{dt_{i+1}}{dr}\bigg|_{r=r_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{4}$$

Метод побудови розв’язку [1] нелінійної задачі теплопровідності (1)-(4) включає такі кроки:

1) обезрозмірення математичної моделі;

2) апроксимацію експериментально заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури;

3) здійснення перетворення Кірхгофа;

4) розв'язання отриманої задачі на змінні Кірхгофа;

5) здійснення оберненого перетворення Кірхгофа.

Зазначимо, що температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури подані у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t0}^{(i)} \lambda_*^{(i)}(T_i) = = \lambda_{t0}^{(i)}\left(1 + k_i\left(T_i - T_p\right)\right)$, де k_i — задані сталі, а $\lambda_{t0}^{(i)} = \lambda_t^{(i)}(t_p)$ — опорні значення коефіцієнтів теплопровідності.

Визначення компонент напружено-деформованого стану здійснено за методикою [1]. Отримані формули для обчислення напружено-деформованого стану справедливі тільки для тонких складових, тобто таких, для яких при обчисленні присутніх в інтегральних рівняннях інтегралів з задовільною для нас точністю справедлива формула трапецій

$$\int_{\rho_i}^{\rho} Y(\eta) d\eta = \frac{\rho - \rho_i}{2}\left(Y(\rho) + Y(\rho_i)\right).$$

Якщо ж циліндр містить тонкі і товсті складові, то кожному із товстих шарів ставимо у відповідність певну кількість тонких з одного і того ж матеріалу. Перевірку достатності розбиття товстих шарів на тонкі складові забезпечує виконання інтегральної умови

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta,$$

де $\rho = r/l_0$, l_0 — деякий характерний розмір, p_1, p_2 — задані сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра, $\sigma^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_\varphi^{(i)}$ — сумарні напруження, n — кількість тонких шарів, які моделюють тришаровий циліндр.

Отже, сформульовано нелінійну математичну модель для визначення температурного поля в тришаровому термочутливому порожнистому циліндрі за складного теплообміну; Побудовано розв'язок нелінійної задачі теплопровідності та визначено компоненти напружено-деформованого стану. Досліджено вплив термочутливості матеріалів складових на характер і рівень розподілу температури, напружень, деформацій та переміщень.

Список літературних джерел

1. Попович В.С., Калиняк Б.М. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2014. — 57, №2. — С. 169-186.

2. Kushnir R.M., Popovych V.S. Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange: Heat Conductipon — Basic Research / V.S. Vikhrenko (ed.). — In Tech, 2011. — P. 131-154.