ЗВАЖЕНІ АЛГЕБРИ ТИПУ ВІНЕРА. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГЕЛЬФАНДА

Атаманюк Любов

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Atamanyukl10@gmail.com

Розглянемо банахову алгебру Вінера $W(w)$ з вагами для функцій з нескінченним числом змінних. Для кожного $\lambda_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$, з околу $\rho_{1,k_\alpha} \leqslant |\lambda_\alpha| \leqslant \rho_{2,k_\alpha}$ визначимо функціонал $h_\lambda(f)$ на $W(w)$ як

$$h_\lambda(f) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_l} \prod_\alpha \lambda_\alpha^{k_\alpha},$$

де $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l, 0, \ldots)$.

Теорема. *Будь-який мультиплікативний лінійний функціонал φ на $W(w)$ є вигляду $h_\lambda(f)$ для деякого λ_α з $\rho_{1,k_\alpha} \leqslant |\lambda_\alpha| \leqslant \rho_{2,k_\alpha}$.*

Отже, існує окіл $\Sigma = \{\lambda_\alpha | \rho_{1,k_\alpha} \leqslant |\lambda_\alpha| \leqslant \rho_{2,k_\alpha}\}$, де $0 < \rho_{1,k_\alpha} \leqslant \rho_{2,k_\alpha} < \infty$, такий, що спектр Гельфанда $\mathcal{M}$ на $W(w)$ складається з функціоналів $\varphi_\lambda, \lambda \in \Sigma$, визначених як $\varphi_\lambda(f) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_l} \prod_\alpha \lambda_\alpha^{k_\alpha}$, де $f \in W(w)$. Відображення $\eta : \Sigma \longrightarrow \mathcal{M}$ визначене як $\eta(\lambda) = \varphi_\lambda$ є бієктивне і неперервне. Нехай $f = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k e^{i(k,x)} \in W(w)$,

$$\widehat{f}(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(f) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_l} \prod_\alpha \lambda_\alpha^{k_\alpha}.$$

Таким чином, ми ототожнили $\mathcal{M}$ з Σ для відображення η, тоді перетворення Гельфанда на $W(w)$ є відображення $\Gamma : W(w) \longrightarrow C(\Sigma)$ визначене як

$$(\Gamma f)(\lambda) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_l} \prod_\alpha \lambda_\alpha^{k_\alpha}, \lambda \in \Sigma.$$

Використано результат роботи [1].

Література

[1] *Atamanyuk L.* Wiener weighted algebra of functions of infinitely many variables, “Карпатські математичні публікації”, 2015, Том 7, № 1, сторінки 3-5.

[2] Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. Classes of Linear Operators. - Birchauser Verlag, Basel, Switzerland: Vol.2, 1993.

[3] Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Аналог теоремы Винера для бесконечномерных банаховых пространств.* Математические заметки, февраль 2015, **2** (97), 191-202.

ДВА КРИТЕРІЇ ОБМЕЖЕНОСТІ L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ АНАЛІТИЧНИХ В БІКРУЗІ ФУНКЦІЙ

[1]Бандура Андрій, [2]Петречко Наталія

[1]Івано-Франківський національний технічний університет
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка

[1]andriykopanytsia@gmail.com, [2]petrechko.n@gmail.com

Нехай $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{1} = (1,1) \in \mathbb{R}^2_+$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$, $\mathbb{D}^2(z^0, R) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_j - z_j^0| < r_j, \ j \in \{1,2\}\}$ — відкритий полікруг, $\mathbb{T}^2(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z_j - z_j^0| = r_j \ j \in \{1,2\}\}$ — його кістяк, $\mathbb{D}^2[z^0, R] = \{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z_j - z_j^0| \leqslant r_j, \ j \in \{1,2\}\}$ — замкнений полікруг, $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}^2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Частинні похідні аналітичної в $\mathbb{D}^2$ функції $F(z_1, z_2)$ позначатимемо $F^{(p,q)}(z_1, z_2) := \frac{\partial^{p+q} F(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}$. Для цілої функції $F(z)$ покладемо $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2(z^0, R)\}$. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), l_2(z))$, де $l_j(z) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що $\forall z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ $l_j(z) > \frac{\beta}{1 - |z_j|}$, $\beta > 1$, $j \in \{1,2\}$. Для $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$, $j \in \{1,2\}$. Подібним чином, визначаються інші нерівності.

Аналітичну функцію $F\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ називаємо функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу (за сукупністю змінних), якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{D}^2$ і для всіх $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2_+$

$$\frac{1}{p_1! p_2!} \frac{|F^{(p_1, p_2)}(z)|}{l_1^{p_1}(z) l_2^{p_2}(z)} \leqslant \max_{0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n_0} \frac{1}{k_1! k_2!} \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z) l_2^{k_2}(z)}.$$

Це аналог означення функції обмеженого індексу в $\mathbb{C}^2$ ([1, 2]). Найменше таке n_0 називають *L-індексом за сукупністю змінних функції F і позначають* $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^2) = n_0$. Через $Q^2(\mathbb{D}^2)$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють умови $(\forall R, \ \mathbf{0} \leqslant R \leqslant \mathcal{B})$: $0 < \lambda_{1,j}(R) \leqslant \lambda_{2,j}(R) < \infty$, $j \in \{1,2\}$, де $\mathcal{B} = (\beta, \beta)$, $R/\mathbf{L}(z^0) := \big(r_1/l_1(z^0), r_2/l_2(z^0)\big)$,

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf\left\{\inf\left\{l_j(z)/l_j(z^0) \colon z \in \mathbb{D}^2[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]\right\} : z^0 \in \mathbb{D}^2\right\},$$
$$\lambda_{2,j}(R) = \sup\left\{\sup\left\{l_j(z)/l_j(z^0) \colon z \in \mathbb{D}^2[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]\right\} : z^0 \in \mathbb{D}^2\right\}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^2(\mathbb{D}^2)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{D}^2$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, щоб* $(\forall R, \ \mathbf{0} \leqslant R \leqslant \mathcal{B})$ $(\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+)$ $(\exists p \geqslant 1)$ $(\forall z^0 \in \mathbb{D}^2)$ $(\exists k^0 \in \mathbb{Z}^2_+, \ k_1^0 + k_2^0 \leqslant n_0)$:

$$\max\left\{|F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1, z_2)| : z \in \mathbb{D}^2\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \leqslant p \cdot |F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1^0, z_2^0)|$$