з нелокальними умовами типу моментів

$$\mathcal{M}(r_j; u) \equiv \int_0^T \overset{r_j}{t}\, u(t,\cdot)\, dt = \varphi_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де позначено $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_p})$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\overset{r_j}{t} = t^{r_j}/r_j!$, $r_j! = \Gamma(r_j + 1)$, $A_j(\partial_x) = \sum_{|s| \leqslant j} a_{js}\partial_x^s$ і $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$. Порядки r_j моментів $\mathcal{M}(r_j; u)$ невід'ємні та впорядковані за зростанням: $r_1 < \cdots < r_p$. Додатково вважаємо, що λ-корені алгебричного рівняння $\lambda L_0(\lambda, \xi) = 0$, де $L_0(\partial_t, \partial_x)$ — головна частина диференціального виразу $L(\partial_t, \partial_x)$, є простими для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$.

Введемо шкали просторів: $\{\mathbf{H}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$ — шкала гільбертових просторів $\mathbf{H}_q$ функцій, отриманих поповненням множини періодичних многочленів вигляду $v(x) = \sum_k v_k e^{i(k,x)}$ за нормою $\|v; \mathbf{H}_q\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \|v_k\|^2 (1 + \|k\|^2)^q\right)^{1/2}$, де $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма; $\{\mathbf{H}_q^n\}_{q \in \mathbb{R}}$ — шкала банахових просторів $\mathbf{H}_q^n$ таких функцій $u = u(t,x)$, що $\partial_t^j u \in \mathbf{C}([0,T]; \mathbf{H}_{q-j})$ і $\|u; \mathbf{H}_q^n\|^2 = \sum_{j=0}^n \|\partial_t^j u; \mathbf{C}([0,T]; \mathbf{H}_q^{q-j}\|^2$.

Теорема. *Нехай $r_1 \geqslant n$, тоді для кожного $T \in [T_0, T_1]$ задача* (1), (2) *може мати лише скінченновимірне ядро, яке складається з тригонометричних многочленів $v(t,x) = \sum_{1+\|k\|^2 < K^2} v_k(t) e^{i(k,x)}$ степеня нижче K, а для $T \in [T_0, T_1] \backslash \mathcal{T}$, де $\mathcal{T}$ — скінченна множина, задача* (1), (2) *у разі $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset \mathbf{H}_{q+n}$ має у просторі $\mathbf{H}_q^n$ єдиний розв'язок u, який є сумою*

$$u_K(t,x) + \sum_{1+\|k\|^2 \geqslant K^2} \left(e^{\lambda_1 t} \ldots e^{\lambda_n t}\right) \mathcal{M}_k^{-1} \mathrm{col}\,(\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{nk}) e^{i(k,x)},$$

де u_K — тригонометричний многочлен степеня нижче K, $\lambda_j = \lambda_j(k)$ — корені многочлена $L(\lambda, ik)$, $\mathcal{M}_k = \left(\mathcal{M}(r_i; e^{\lambda_j t})\right)_{i,j}$ — матриця моментів, φ_{jk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_j (число K та множина $\mathcal{T}$ залежать лише від n, коефіцієнтів a_{js}, порядків r_i і чисел T_0 та T_1).

Q-УМОВНІ ОПЕРАТОРИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Ічанська Наталія, Сєрова Марія

Полтавський національний технічний університет ім. Ю. Кондратюка

mvusata@gmail.com

У теорії диференціальних рівнянь важливими є рівняння, що володіють нетривіальними симетрійними властивостями. Математичний апарат багатьох фізичних процесів в різних наукових галузях базується саме на таких рівняннях. Унаслідок свого широкого застосування такими рівняннями є лінійні та нелінійні рівняння теплопровідності, які вивчали багато науковців (Софус Лі, Овсянніков Л.В.[1], Блумен і Коул [2] та ін.). Поняття та метод дослідження умовної симетрії введені в [3]. Ця робота присвячена дослідженню Q-умовної симетрії нелінійних (1+2)-вимірних (1+2) рівнянь теплопровідності:

$$H(u)u_0 + \Delta u = F(u), \tag{1}$$

де $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in R^2$, $H(u)$ та $F(u)$- довільні гладкі функції. Будь-яке таке рівняння заміною можна привести до вигляду

$$u_0 + \nabla(g(u)\nabla u) = f(u), \tag{2}$$

де g та f виражаються через F та H.

Q-умовну симетрію рівнянь (1) будемо вивчати відносно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + \mathrm{B}^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{3}$$

де A, B^a, C — довільні гладкі функції, $a = 1,2$.

Розв'яжемо задачу: провести повний опис операторів (3), відносно яких за умови $H \neq 0$, рівняння (1) є Q-умовно інваріантне. Тобто дослідимо Q-умовну симетрію рівнянь вигляду (1) відносно інволютивних множин, що складаються з одного оператора. З точністю до перетворення еквівалентності на операторах Q-умовної симетрії та перетворень з ядра основних груп рівнянь (1) (а саме, поворотів змінних x_1 і x_2) можна вирізняти два класи:

$$Q = \partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

$$Q = \partial_1 + B(x,u)\partial_2 + C(x,u)\partial_u, \tag{5}$$

де B^a, C, B — довільні гладкі функції, $a = 1,2$.

Теорема 1. *Рівняння (1) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (5), якщо функції B^a, C задовольняють наступним умовам*

$$\begin{gathered} B^a_u = 0, \quad C_{uu} = 0, \; B^1_1 = B^2_2, \quad B^1_2 = -B^2_1\,, \\ \dot{H}C^2 - \dot{F}C + HC_0 + \Delta C + FC_u - 2B^2_2(F - HC) = 0, \\ \dot{H}CB^a + HB^a_0 - 2C_{au} + 2HB^aB^1_1 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

та оператора (6), якщо

$$\begin{aligned} &B_u = 0,\; C_{uu} = 0,\; (B^2+1)C\dot{H} = 2(BB_1 - B_2)H, \\ &B_0H = -2BC_{1u} + 2C_{2u} + 2B_1C_u - \Delta B + \tfrac{2}{B^2+1}[BB_aB_a - 2(B_1 + BB_2)C_u], \quad (8) \\ &C\dot{F} - C_uF = C_0H + 2CC_{1u} + \Delta C - \tfrac{2}{B^2+1}[(C_1 + CC_u - F)(BB_1 - B_2) + \\ &+ (B_1 + BB_2)C_2] \end{aligned}$$

Доведення ґрунтується на критерії Q-умовної інваріантності. В цьому випадку функція $S = Hu_0 + \Delta u - F$, а множина диференціальних наслідків складається з трьох рівнянь. Оскільки функції B^a, C, H, F не залежать від похідних, то ми можемо розщепити по незв'язним похідним. Розщеплення суттєво розрізняється для операторів (5) та (6). Після стандартних перетворень, в результаті одержимо рівності (7) та (8).

Теорема 2. *Будь-який оператор (3) Q-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності (1) або є еквівалентним оператору лієвської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності та додаткових перетворень є еквівалентним одному з операторів, що наведені в наступній таблиці ($\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — довільні сталі).*

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$\forall$	$(\lambda_1 u+\lambda_2)[H+\lambda_0]$	$Q=\partial_0+(\lambda_1 u+\lambda_2)\partial_u$	$(\lambda_1 u + \lambda_2) \neq (0,0)$
2	u	$\lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$	$Q=\partial_0+[\lambda_2 u-b(\vec{x})]\partial_u$	$\Delta b = b^2+\lambda_1 b+\lambda_2\lambda_0$
3	1	$\lambda u \ln u,\ \lambda \neq 0$	$Q=\partial_1+a(x_0,x_1)u\partial_u$	$a_0+a_{11} = -2aa_1+\lambda_a$

Теорема 2 дає повне розв'язання задачі опису операторів (3) Q-умовної інваріантності рівняння (1) за умови $H \neq 0$. Зауважимо, що раніше ця задача розглядалася в роботі [4] тільки для класу операторів вигляду (5). Результати з [4] не є вичерпними і містяться серед результатів отриманих в цій роботі.

Література

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. - 1959. - Т. 125, № 3. - С. 492-495.

[2] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J.Math.Mech.- 1969.- Vol.18, №11.- P.1025-1042.

[3] Fushchych W., Shtelen W. and Serov N. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. - 1993. - 436p.

[4] Goard J. and Broadbridge P. Nonclassical symmetry analysis of nonlinear reaction-diffusion equations in two spatial dimensions// Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. - 1996. Vol.26, №-4.- P.735-756.

ДО ОБГРУНТУВАННЯ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

[1]Копач Михайло, [2]Обшта Анатолій, [3]Шувар Богдан

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", [2,3]Національний університет "Львівська політехніка"

kopachm2009@gmail.com