Існує стандартний марківський процес $(x(t), \mathbb{P}_x)$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такий, що

$$\mathbb{P}_x(\{x(t) \in \Gamma\}) = \int_\Gamma g(t,x,y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Розглянемо наступні моменти зупинки

$$\tau^0 = \inf\{s \geqslant 0 : x(s) = 0\} \quad \text{та} \quad \sigma = \inf\{s \geqslant 0 : x(s)x(0) \leqslant 0\}$$

і функцію

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - g(t,-|x|,|y|)$$

визначену для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $y \in \mathbb{R}_0$ ($\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$).

Якщо $\alpha = 2$, то $\mathbb{P}_x(\{\tau^0 = \sigma\}) = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ і

$$\mathbb{P}_x(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\tau_0 > t\}) = \int_\Gamma g^*(t,x,y)\,dy \tag{2}$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$.

Якщо ж $1 < \alpha < 2$, то $\mathbb{P}_x(\{\tau^0 > \sigma\}) = 1$ при $x \in \mathbb{R}_0$ і рівність (2) не виконується.

Позначимо через $(x^0(t), \mathbb{P}_x^0)$ і $(x^*(t), \mathbb{P}_x^*)$ марківські процеси на $(\mathbb{R}_0, \mathcal{B}(\mathbb{R}_0))$ ймовірності переходу яких задаються, відповідно, лівою і правою частинами рівності (2). Досліджені деякі властивості цих процесів, зокрема, знайдено їх оператори потенціалів, розподіли випадкових величин τ^0 і τ^* (остання – це тривалість "життя" процесу $(x^*(t))_{t\geqslant 0}$) і показано, що розподіли величин τ^* і σ різні.

ПРО СТІЙКІСТЬ ТОРОЇДАЛЬНОГО МНОГОВИДУ

[1]Перестюк Микола, [2]Перестюк Юрій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

[1]perestyuknn@gmail.com, [2]perestyuk@gmail.com

Якщо динамічна система

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad x \in R^{n+m},$$

має квазіперіодичну траєкторію

$$x(t) = f(w_1 t, w_2 t, ... w_m t) = f(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$$

то замикання її породжує тороїдальний многовид.

Як показано в [1], для дослідження поведінки траєкторій вихідної системи в деякому околі цього многовиду в певних випадках зручно перейти від евклідових координат $(x_1, ..., x_{n+m})$ до локальних координат $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ і $h = (h_1, ..., h_n)$, так щоб рівняння многовиду набуло вигляду: $h = 0$, $\varphi \in T_m$, де $T_m - m-$ вимірний тор.

Глибокі результати дослідження інваріантних тороїдальних многовидів підсумовані в фундаментальних монографіях [1-2].

Розглядатимемо систему рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = a(\varphi), \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = P(\varphi)h, \qquad (1)$$

де $m-$ векторна функція $a(\varphi)$ і $n-$ матрична функція $P(\varphi)$ є гладкі $2\pi-$ періодичні по $\varphi \in T_m$ функції. Наведемо деякі результати наших досліджень системи (1).

Теорема 1. *Якщо для системи рівнянь (1) існує додатно-визначена квадратична форма $v(\varphi, h) =< S(\varphi)h, h >$, така що її похідна, складена в силу цієї системи, є від'ємно-визначеною на множині неблукаючих точок Ω, динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, то тривіальний тор системи (1) асимптотично стійкий.*

Теорема 2. *Якщо для системи (1) існує квадратична форма $v(\varphi, h) = < S(\varphi)h, h >$, така що повна похідна її по t, складена в силу системи (1), є додатно визначеною на множині Ω неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, а сама функція $v(\varphi, h)$ на цій множині не є від'ємно сталою, то тривіальний тор системи (1) нестійкий.*

Зауважимо, що виконання умов теореми 1 забезпечує існування функції Гріна-Самойленка $G(\tau, \varphi)$ задачі про існування асимптотично стійкого тороїдального многовиду системи рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = a(\varphi), \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = P(\varphi)h + c(\varphi),$$

для будь-якої неперервної на T_m функції $c(\varphi)$. Цей многовид можна подати у вигляді

$$h = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} G(\tau, \varphi)c(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad \varphi \in T_m,$$

де $\varphi_t(\varphi)$ - розв'язок першого з рівнянь (1).

Теореми 1 і 2 дають можливість дослідити асимптотичну стійкість і нестійкість тривіального тора нелінійної по h системи рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = a(\varphi), \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = P(\varphi, h)h, \qquad (3)$$

в якій матрична функція $P(\varphi, h)$ є неперервною по $\varphi \in T_m$ і h, $||h|| < a_0$, a– деяке додатне число.

Теорема 3. *Якщо існує додатно визначена квадратична форма $v(\varphi, h)$ така що повна похідна її по t, складена в силу рівнянь*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = a(\varphi), \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = P(\varphi, 0)h \qquad (4)$$

є від'ємно визначеною на множині неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $\varphi \in T_m$, то тривіальний тор системи (3) асимптотично стійкий.

Література

[1] *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний // - М.: Наука, 1987. - 304 с.

[2] *Митропольский Ю. А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова // - К.: Наукова думка, 1992. - 272 с.

[3] *Перестюк М.О., Фекета П.В.* Про збереження інваріантного тора багаточастотних систем// Український математичний журнал, 2013, т. 65, №11, с. 1498-1505.

Q-УМОВНІ СИМЕТРІЇ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ З ЕКСПОНЕНЦІЙНОЮ ДИФУЗІЄЮ

Плюхін О. Г.

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

pliukhin@gmail.com

Розглянемо рівняння нелінійної теплопровідності (дифузії) вигляду

$$u_t = (e^u u_x)_x, \qquad (1)$$

де $u = u(t, x)$ – довільна гладка функція, нижні індекси t, x означають диференціювання за змінними t, x відповідно. Рівняння типу (1) застосовується при моделюванні різноманітних процесів фізики, хімії тощо. Рівняння (1) досліджувалося багатьма авторами, зокрема, повний опис симетрій Лі цього рівняння виконано в роботі [1], Q-умовні симетрії рівняння такого типу досліджувалися в роботі [2].

Будемо шукати оператори Q-умовної симетрії [3] вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u,$$

відносно яких інваріантне рівняння (1).